

Maciej Matyka

SYMULACJE KOMPUTEROWE W FIZYCE

Wydanie II

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Helion SA dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Helion SA nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Projekt okładki: Studio Gravite / Olsztyn
Obarek, Pokoński, Pazdrijowski, Zaprucki

Grafika na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.com

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
<http://helion.pl/user/opinie/syko2>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-283-5496-8

Copyright © Helion 2021

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

Spis treści

Wstęp	7
--------------------	----------

Rozdział 1. Schematy różnicowe rozwiązywania

równań różniczkowych zwyczajnych	11
1.1. Równania różniczkowe zwyczajne i różnice skończone	11
1.2. Równania różniczkowe zwyczajne i rachunek całkowy	13
1.2.1. Schemat różnicowy Eulera	13
1.2.2. Rozwiązanie równania rozpadu promieniotwórczego	16
1.2.3. Metoda skokowa z wstępnymi obliczeniami Eulera	19
1.2.4. Wahadło matematyczne	24
1.2.5. Punkt materialny przymocowany do sprężyny	33
1.3. Dokładniejsze metody wyznaczania rozwiązań równań różniczkowych	39
1.3.1. Metoda punktu środkowego drugiego rzędu	40
1.3.2. Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu	42
1.4. Zestawienie poznanych schematów rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych	44
1.5. Podsumowanie	46

Rozdział 2. Dynamika według sir Isaaca Newtona

2.1. Rachunek wektorowy	47
2.1.1. Klasa Wektor	48
2.1.2. Operacje na wektorach	49
2.1.3. Rachunek wektorowy — podsumowanie	55
2.2. Zasady dynamiki Newtona	56
2.2.1. Pierwsza zasada dynamiki Newtona	56
2.2.2. Druga zasada dynamiki Newtona	56
2.2.3. Trzecia zasada dynamiki Newtona	56

2.3. Model fizyczny dynamiki układów punktów materialnych	57
2.3.1. Elementy składowe modelu	57
2.4. Punkt materialny	60
2.4.1. Przechowywanie danych. Lista jednokierunkowa	60
2.4.2. Równania ruchu pojedynczego punktu materialnego	64
2.5. Kolizje	68
2.5.1. Prosta metoda wykrywania kolizji punkt – ściana	68
2.5.2. Nieruchoma sfera kolizji	70
2.6. Oddziaływania między punktami materialnymi	79
2.6.1. Prawo powszechnego ciążenia	80
2.6.2. Oddziaływanie sprężyste pary punktów	83
2.7. Konstruowanie obiektów złożonych	86
2.7.1. Model dwuwymiarowego sznura	86
2.7.2. Symulacja trójwymiarowych tkanin	89
2.7.3. Konstrukcja bryły sztywnej	90
2.7.4. Konstrukcja modelu poruszającej się postaci	93
2.8. Obiekty złożone z „mięśniami”	95
2.8.1. Więzy odległości	99
2.9. Ciała miękkie	103
2.9.1. Symulacja flagi	103
2.9.2. Szczypta historii	106
2.9.3. Model fizyczny ciał miękkich	107
2.9.4. Ciśnienie i równanie stanu gazu doskonałego	109
2.9.5. Objętość zamkniętej bryły	110
2.9.6. Algorytm symulacji ciała miękkiego	113
2.9.7. Kod źródłowy symulacji ciał miękkich — HTML5	116
2.9.8. Przykłady symulacji	127
2.9.9. Wzajemne kolizje	128
2.9.10. Zmienny krok czasowy symulacji	132
2.9.11. Perspektywy ciał miękkich	133
2.10. Podsumowanie	135
Rozdział 3. Rozwiązanie numeryczne równania falowego	137
3.1. Co to jest fala?	137
3.2. Klasyczne równanie falowe	138
3.3. Równanie falowe w jednym wymiarze	138
3.3.1. Podział równania falowego na układ dwóch sprzężonych równań różniczkowych pierwszego rzędu	139
3.3.2. Siatka różnicowa Eulera w jednym wymiarze	139

3.3.3. Rozwiązanie algorytmiczne układu równań sprzężonych	140
3.3.4. Algorytm programu realizującego równanie falowe 1D	141
3.3.5. Efekty działania przedstawionego algorytmu	147
3.4. Równanie falowe w dwóch i więcej wymiarach przestrzennych	152
3.4.1. Siatka różnicowa Eulera w dwóch wymiarach	153
3.4.2. Realizacja symulacji równania falowego w dwóch wymiarach	157
3.5. Podsumowanie	164

Rozdział 4. Symulacje cieczy nieściśliwej 165

4.1. Równanie Naviera-Stokesa dla cieczy nieściśliwej	165
4.1.1. Warunek nieściśliwości cieczy	166
4.1.2. Pola wektorowe	167
4.1.3. Analiza równania Naviera-Stokesa	169
4.2. Rozwiązanie uproszczone równań NS	172
4.2.1. Równanie płytkiej wody	172
4.2.2. Warunek zachowania masy	173
4.2.3. Końcowa postać równania dla płytkiej wody	174
4.2.4. Przybliżenie dyskretne	175
4.2.5. Efekty działania	178
4.3. Pełne rozwiązanie równań NS dla cieczy nieściśliwej	180
4.3.1. Reprezentacja cieczy	181
4.3.2. Schematy różnicowe dla równania NS	187
4.3.3. Warunki brzegowe	197
4.3.4. Algorytm programu	201
4.3.5. Wizualizacja rezultatów obliczeń	215
4.4. Ogólnie o schematach różnicowych	219
4.5. Metoda gazu sieciowego Boltzmanna	220
4.5.1. LBM a gaz sieciowy LGA	221
4.5.2. Funkcja rozkładu	222
4.5.3. Model dwuwymiarowy (D2Q9)	223
4.5.4. Prędkość, gęstość, ciśnienie	225
4.5.5. Równanie transportu Boltzmanna	226
4.5.6. Algorytm	230
4.5.7. Implementacja LBM w języku C/C++	232
4.5.8. Przepływ wielofazowy	262
4.5.9. Model trójwymiarowy (D3Q15)	267
4.5.10. Przepływ przez ośrodki porowate	271
4.5.11. Jednostki fizyczne w LBM	291
4.5.12. Metoda wielorelaksacyjna LBM-MRT	296

4.5.13. Metoda LBM dla $\tau = 1$	300
4.5.14. Przepływ z powierzchnią swobodną	311
4.6. Podsumowanie	313
Rozdział 5. Równanie Schrödingera	315
5.1. Funkcja falowa — wektor stanu układu kwantowego	315
5.2. Ewolucja w czasie stanu układu kwantowego	316
5.3. Dyskretna postać operatora ewolucji w czasie	317
5.4. Schemat rozwiązywania różnicowego	318
5.5. Stan początkowy układu	319
5.6. Implementacja	319
5.6.1. Algorytm programu	320
5.6.2. Konstrukcja stanu początkowego	320
5.6.3. Pętla obliczeniowa	322
5.7. Rezultaty	324
5.8. Podsumowanie	326
Dodatek A. Materiały dołączone do książki	327
Bibliografia	351
Skorowidz	364

2.9. Ciała miękkie

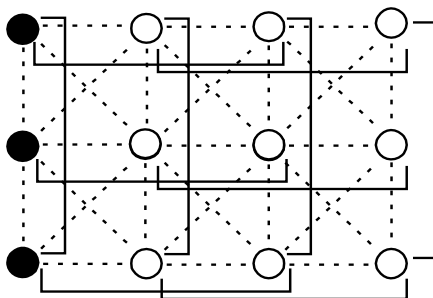
Czy zastanawiałeś się kiedyś, jak to się dzieje, że piłka rzucona swobodnie odbija się od ziemi? Dlaczego bardziej nadmuchana piłka jest twarda? Co się dzieje na powierzchni piłki przy mocnym kopnięciu? Jednym z zastosowań omówionego w tym rozdziale modelu mas i sprężynek jest symulacja ciał miękkich (ang. *soft bodies*) — swego rodzaju balonów, które odkształcają się pod wpływem przyłożonej siły i po uwolnieniu wracają do swojej pierwotnej postaci [23, 24]. Takiego modelu z powodzeniem można użyć do odpowiedzi na postawione wyżej pytania. I chociaż ta odpowiedź nie będzie całkowicie precyzyjna, to może być bardzo widowiskowa, bo będzie zawierać wizualizację tych zjawisk. Omawianie modelu rozpoczniemy od symulacji flagi, która wyjaśni nam, jak implementuje się siły zewnętrzne (np. wiatr) w tego typu modelach. Następnie wprowadzimy ciśnienie i — budując odpowiednio modele — uzyskamy efekt ciała miękkiego.

2.9.1. Symulacja flagi

Symulację flagi rozpoczniemy od symulacji tkaniny zbudowanej jak na rysunku 2.45. Punkty materialne tworzące tkaninę poddawane są działaniu sił grawitacji i sprężystości połączeń z najbliższymi sąsiadami, tworząc elastyczną powierzchnię. Używamy połączeń poziomych, pionowych i ukośnych. Aby symulować flagę trzepoczącą na wietrze, w tkaninie wprowadzamy kilka modyfikacji. Najpierw unieruchamiamy punkty, które znajdują się na jednej z jej krawędzi, aby flaga miała na czym wisieć (wieszanie flagi na maszcie) — patrz rysunek 2.45. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale nieruchomienie jest realizowane przez wyłączenie tych punktów z procedury całkowania równań ruchu.

Rysunek 2.45.

Model flagi na wietrze zbudowany ze standardowej tkaniny z unieruchomionymi punktami na lewej krawędzi. Model uproszczony (4×3 punkty) — w praktyce punktów używa się więcej w celu zachowania realizmu symulacji

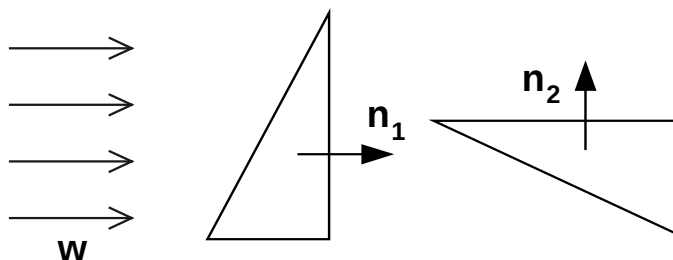


W następnym kroku do standardowego algorytmu symulacji tkaniny, w którym wyliczane są siły sprężystości, grawitacji i tłumienia działające na poszczególne punkty materialne, dodajemy kolejną siłę — siłę wiatru, która będzie oddziaływać na powierzchnię flagi. Wiatr uprościmy, przyjmując, że jest jednorodny w całej przestrzeni. To duże uproszczenie, jednak — jak się okaże dalej — jest ono uzasadnione i nie psuje efektu końcowego. Same elastyczne ruchy powierzchni obiektu spowodują, że ruch flagi będzie dość chaotyczny i nieuporządkowany i wcale nie trzeba do tego niejednorodności siły.

Oznaczmy zatem wiatr pojedynczym wektorem w , który określa zwrot, kierunek i wartość siły oddziałującej na powierzchnię. Siła wiatru (nazwijmy ją F_w) będzie uzależniona od tego, jak bardzo prostopadłe wiatr wieje na daną powierzchnię. Ta intuicja doprowadza nas do prostego wzoru:

$$F_w = (w \cdot n) \cdot n \quad (2.19)$$

gdzie n jest wektorem normalnym do powierzchni, a znak mnożenia oznacza mnożenie skalarne wektorów. Łatwo zauważyć, że wiatr wiejący prostopadłe do powierzchni będzie działał największą siłą, bo iloczyn skalarny jest proporcjonalny do cosinusa kąta między wektorami, a ten jest wtedy równy 1. Inaczej będzie dla powierzchni równoległej do wiatru — w tym przypadku wektory wiatru i wektor normalny będą do siebie prostopadłe, a iloczyn skalarny znika (bo $\cos 90^\circ = 0$). Ilustruje to rysunek 2.46.



Rysunek 2.46. Ilustracja modelu pozwalającego wyliczyć siłę wiatru działającą na pojedynczy trójkąt. Jednorodny wiatr, którego kierunek jest oznaczony wektorem w , wiejący prostopadłe do powierzchni o wektorze normalnym n_1 , wywiera na nią największą siłę. Wiatr wiejący równoległe (na powierzchnię o wektorze normalnym n_2) nie wywiera żadnej dodatkowej siły

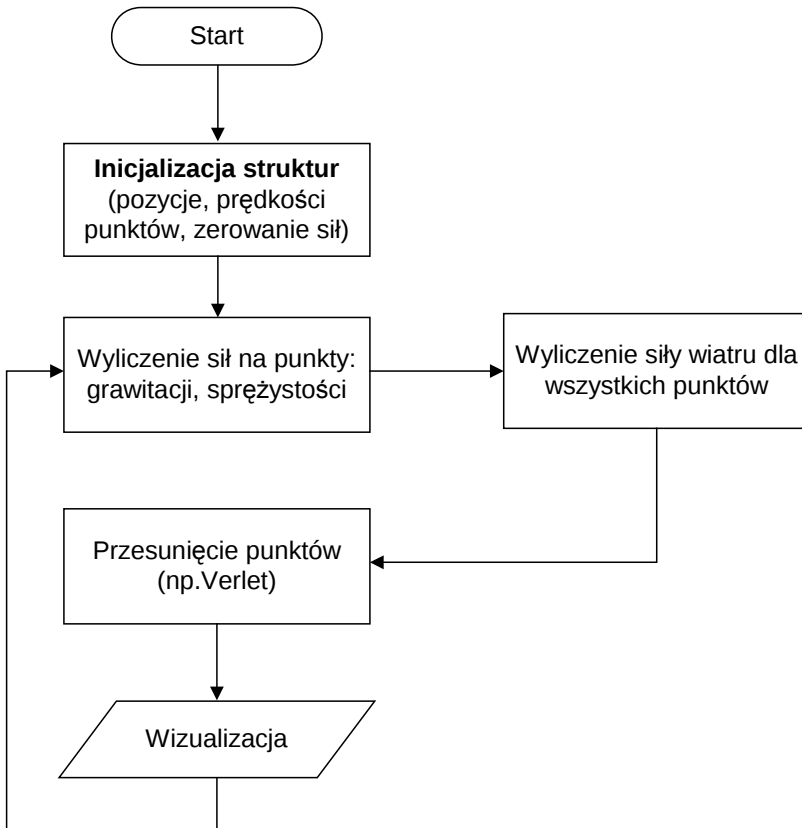
Jednym z możliwych rozszerzeń podstawowego modelu jest uwzględnienie ruchu samego trójkąta, który jednocześnie może modyfikować wpływ wiatru na swoją prędkość. Siła zależy wtedy od względnej prędkości między trójkątem a wiatrem. W takim przypadku dla trójkąta poruszającego się z prędkością v w równaniu (2.19) bierzemy $w \rightarrow (w - v)$, co skutkuje nowym wzorem na siłę działającą na pojedynczy trójkąt (lub punkt materialny) o normalnej n :

$$F_w = ((w - v) \cdot n) \cdot n \quad (2.20)$$

Ze względu na specyficzną budowę tkaniny (na końcu obiekt składa się z powierzchni dużej liczby małych trójkątnych ścian) siła wiatru będzie wyliczana dla każdego punktu materialnego z osobna. Kwestia normalnej do punktu jest oczywiście dyskusyjna, tu jednak posilkujemy się definicją, zgodnie z którą normalna do punktu jest utworzona przez uśrednienie wkładów od normalnych do ścian, do których ten punkt przynależy.

2.9.1.1. Algorytm

Algorytm symulacji flagi składa się z kilku kroków, a zmiany w stosunku do standardowej symulacji tkaniny polegają na zawieszeniu jej za jedną krawędź i dodaniu siły pochodzącej od wiejącego wiatru. Nadal pracujemy na zbiorze początkowo uporządkowanych punktów materialnych, które posiadają zdefiniowane połączenia sprężyste. Aby wygenerować ruch flagi, należy kolejno wykonać kroki przedstawione na rysunku 2.47.



Rysunek 2.47. Algorytm symulacji flagi z użyciem modelu cząstek i sprężynek oraz dodatkowej siły wiatru

W algorytmie newralgiczny fragment kodu w języku C++, w którym oblicza się siłę działającą na pojedynczy punkt materialny o normalnej n , mieści się w kilku liniach. Najpierw iterujemy po wszystkich punktach (tu ułożonych w tablicy dwuwymiarowej o indeksach i, j i wielkości n_x, n_y). Następnie sprawdzamy, czy nasz punkt nie został unieruchomiony (jeśli tak, pomijamy dla niego obliczenia siły wiatru). W naszym kodzie flaga punktu jest wtedy ustawiona na P_ZAW (stała oznaczająca, że punkt nie bierze udziału w symulacji fizycznej). Na koniec liczymy siłę wprost ze wzoru (2.20), wykorzystując wcześniej wyliczone normalne. W przytoczonym niżej fragmencie kodu wykorzystujemy

obiekt `cloth`, który zawiera wszelkie potrzebne informacje, w szczególności tablicę punktów `cloth.Points` i rozmiar tkaniny `cloth.nx` i `cloth.ny`.

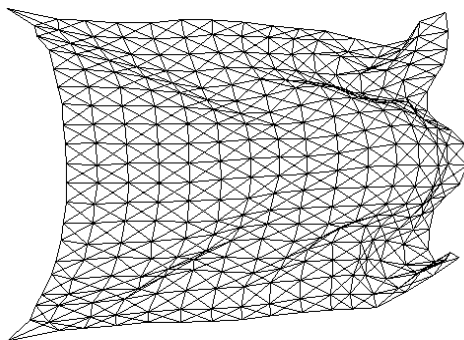
```
for(j=0; j<cloth.ny ; j++)    // wiatr na punkty
for(i=0; i<cloth.nx ; i++)    if(!(cloth.Points[i][j]->flaga & P_ZAW))
    cloth.Points[i][j]->f = cloth.Points[i][j]->f + cloth.Points[i][j]->n * ((Wind -
cloth.Points[i][j]->v)*cloth.Points[i][j]->n);
```

Na rysunku 2.48 przedstawiam jedną klatkę symulacji flagi trzepoczącej na wietrze wykonanej wspomnianym tu algorytmem. Flaga próbuje się oczywiście dostosować kształtem do wiejącego wiatru. Co ciekawe, pomimo że wiatr ma w przestrzeni tę samą wartość, tkanina nie układa się płasko i nie pozostaje w bezruchu. Takiego efektu nie da się uzyskać i nawet przy tak prostej strukturze siły wiatru ruch tkaniny widać cały czas, a zachowanie się tkaniny jest realistyczne — zawija się ona na wietrze, marszczy i tworzy skomplikowane kształty, zachowując dynamikę ruchu.

Rysunek 2.48.

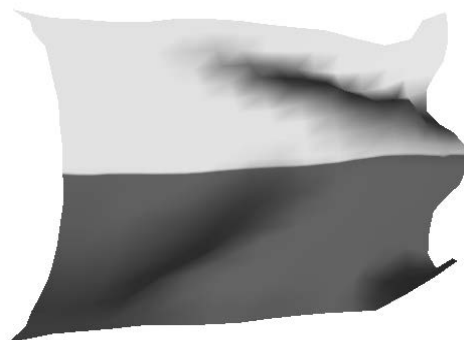
Pojedyncza klatka
symulacji flagi
trzepoczącej
na wietrze [24].
Flaga została
wyrenderowana na
podstawie modelu
fizycznego mas na
sprężynkach
w OpenGL.

a)



Na rysunku
przedstawione
zostały w tej samej
chwili czasu
a) model fizyczny,
b) flaga z teksturą.
Pełna animacja
znajduje się na
kanale YouTube:
<https://youtu.be/J4yKLX3cEb4>

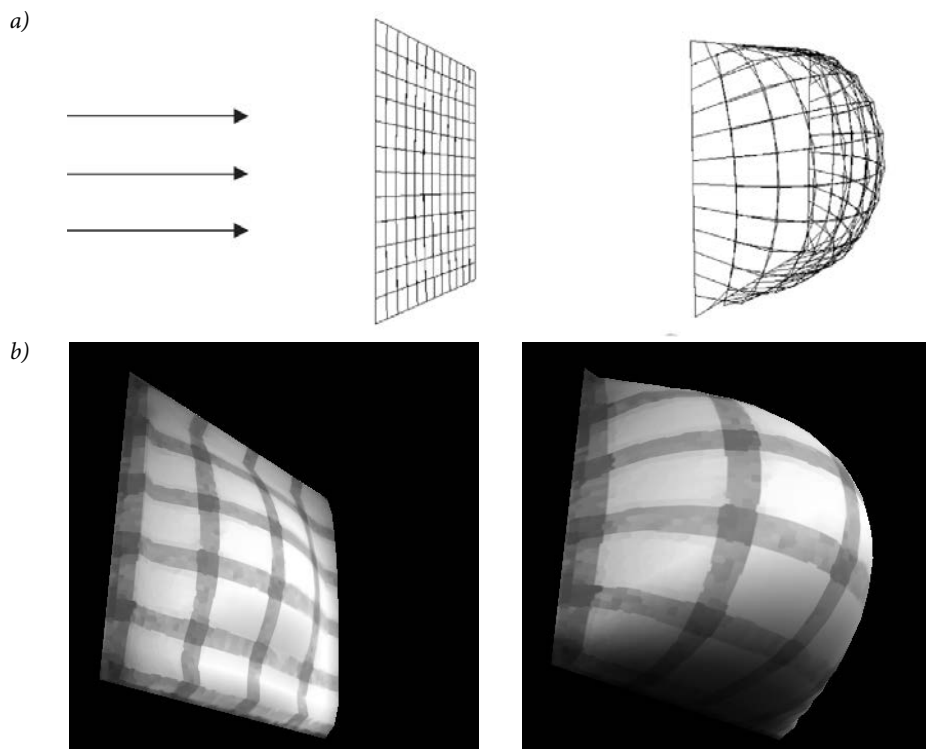
b)



2.9.2. Szczypta historii

Kilkanaście lat temu, bawiąc się symulacją z użyciem mas zawieszonych na sprężynach, przygotowywałem symulację trzepoczącej na wietrze flagi zawieszonej za jedną z krawędzi. Wtedy przypadkiem wpadłem na pomysł, aby unieruchomić wszystkie krawędzie zamiast tylko jednej, „puścić” wiatr prostopadle do powierzchni i zobaczyć, co się z nią

stanie. Efekt był bardzo widowiskowy — powierzchnia wypchała się w jednym kierunku, a modyfikując siłę wiatru, można było świetnie bawić się tym efektem. To, co wtedy widziałem, znajduje się na rysunku 2.49b.



Rysunek 2.49. Tkanina zawieszona na wszystkich czterech bokach, z wiatrem wiejącym prostopadłe do powierzchni. Przedstawione są a) obiekt fizyczny ze sprężyn [23] oraz b) obiekt z symulacji wyrenderowany z teksturą w OpenGL. Na rysunku są dwa przypadki: mocny wiatr (po lewej) i słaby (po prawej). Widać wyraźnie odkształcenie tkaniny pod wpływem siły wiatru (animacja: <https://youtu.be/vSqh02PwGng>), źródło [23]

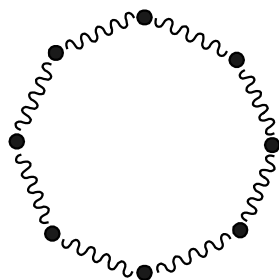
Wtedy nagle mnie olśniło. A gdyby tak zamknąć powierzchnię, a „źródło wiatru umieścić w punkcie centralnym”? Ten zupełnie niefizyczny pomysł, zbudowany oryginalnie na intuicji, że coś może „wiać w każdym kierunku z punktu”, doprowadził do modelu ciał miękkich, w których na powierzchnię działa siła skierowana prostopadłe do niej. Dziś, po kilku latach pracy, model uwzględnia już ciśnienie i równanie stanu gazu doskonałego, z którego liczymy jego wartość. Ale zacznijmy od początku.

2.9.3. Model fizyczny ciał miękkich

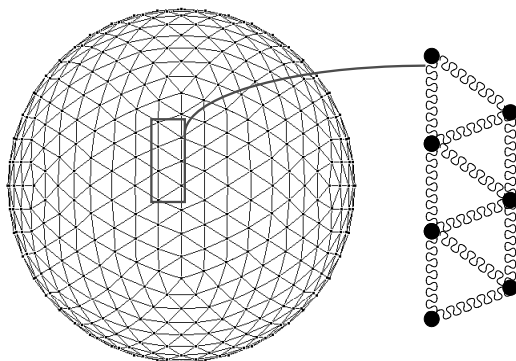
Ciało miękkie reprezentujemy jako zamkniętą powierzchnię uzupełnioną o dodatkową siłę, będącą rezultatem różnicy ciśnień pomiędzy gazem w środku i na zewnątrz ciała. Ciśnie-

nie jest tutaj kluczowe, bo odpowiada za utrzymywanie przez obiekt stałej objętości. Zaczniemy od modelu dwuwymiarowego, w którym ciałem będzie okrąg zbudowany z punktów rozmieszczonych jak na rysunku 2.50. Spostrzegawczy czytelnik na pewno zauważy, że model nie różni się zbytnio od modeli liny — jedynie początkowy punkt łączy się teraz z końcowym, tworząc zamkniętą pętlę punktów.

a)



b)

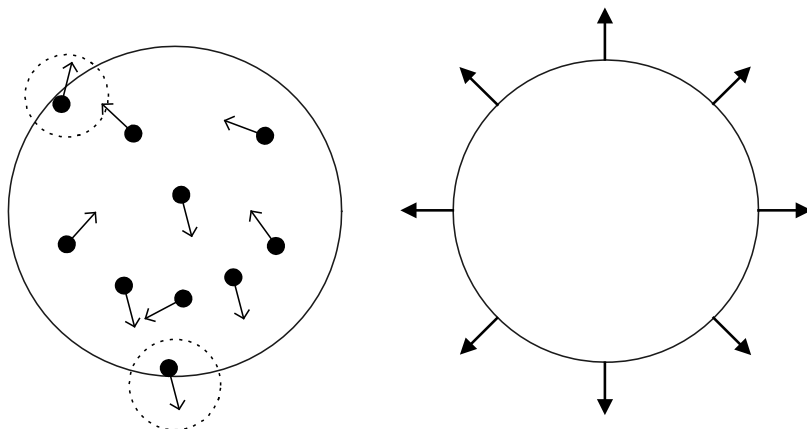


Rysunek 2.50. Budowa a) dwuwymiarowego i b) trójwymiarowego modelu ciała miękkiego.

Czarne kropki oznaczają punkty materialne, a falista linia — połączenia sprężyste (pomiędzy punktami występuje siła Hooke’a). W celu lepszej wizualizacji w modelu 3D zaznaczone zostały tylko sprężyny ścianek zwróconych przodem do obserwatora

Tak zbudowany obiekt nie będzie się jeszcze zachowywał jak piłka, dopóki nie uzupełnimy go o siły utrzymujące kształt i objętość. Bez tego obiekt z rysunku 2.50 po umieszczeniu w polu grawitacyjnym opadnie na powierzchnię i zapadnie się. Wskutek utraty energii stworzy płaski obiekt.

W modelu potrzebujemy jeszcze czegoś, co pomoże piłce utrzymać swój kształt. Będzie to gaz (patrz rysunek 2.51). Przy każdym uderzeniu w ściany ciała cząsteczki gazu będą przekazywać im część swojej energii. To będą małe części, ale dodane razem (duża liczba cząsteczek gazu w środku) mogą wygenerować sporą siłę ciśnienia. Jeśli ciśnienie wewnątrz piłki będzie większe niż ciśnienie atmosferyczne na zewnątrz, to siła będzie skierowana na zewnątrz piłki. Można sobie to wyobrazić tak, że liczba cząsteczek gazu w środku piłki,



Rysunek 2.51. Ciało wypełnione gazem (strona lewa), który oddziałuje ze ściankami i wywiera odpowiednią siłę zwróconą na zewnątrz (strona prawa, wektory siły zaznaczone pełnymi strzałkami) i utrzymującą kształt i objętość ciała. Rysunek jest schematem w dwóch wymiarach, analogiczna sytuacja występuje w 3D

które uderzają o jej powierzchnię, jest dużo większa od liczby cząsteczek bombardujących piłkę z zewnątrz. Z takich mikroskopijnych uderzeń o powierzchnię ciała wynikają siły, które nazywamy ciśnieniem.

Co ciekawe, dokładnie w ten sam sposób radzimy sobie w życiu codziennym. Na przykład pompujemy piłkę tak, aby ciśnienie wewnątrz było znacznie większe niż na zewnątrz (ciśnienie atmosferyczne). Dzięki różnicy ciśnień powstaje siła działająca na jej elastyczne ściany. Ta siła powoduje, że piłka utrzymuje swój kształt i nie zapada się pod własnym ciężarem. Analogiczna sytuacja zachodzi np. w dętkach w rowerze czy oponach w samochodzie.

2.9.4. Ciśnienie i równanie stanu gazu doskonałego

W naszym modelu ciał miękkich nie będziemy śledzić ruchu pojedynczych cząsteczek gazu ani ich zderzeń ze ścianami obiektów. Do tego celu wykorzystamy fizykę statystyczną i prawa pozwalające wyznaczyć ciśnienie w sposób uśredniony. Aby wyliczyć ciśnienie gazu wewnątrz obiektu, wykorzystamy równanie stanu gazu doskonałego:

$$P = nRT/V \quad (2.21)$$

gdzie ciśnienie wewnątrz jest proporcjonalne do liczby moli gazu (n), stałej gazowej (R) i temperatury (T) oraz odwrotnie proporcjonalne do objętości (V). Na nasze potrzeby uprościmy to równanie i założymy, że ciało jest szczelne (n stałe), a temperatura się nie zmienia (T stałe). Możemy wtedy zapisać prostą zależność:

$$P = 1/V \quad (2.22)$$

oznaczającą odwrotną proporcjonalność ciśnienia od objętości. Przy założeniu, że ciśnienie atmosferyczne wynosi zero (możemy to zrobić, odpowiednio dobierając stałe przy obliczaniu ciśnienia wewnątrz ciała miękkiego), możemy zapisać równanie na siłę działającą na pojedynczą ściankę obiektu:

$$F_p = n \cdot P \quad (2.23)$$

gdzie wartość P jest obliczana ze wzoru (2.22), a n jest wektorem normalnym do ścianki. W tym miejscu trzeba odpowiednio dobrać zwrot wektora n lub P , tak aby siła miała zwrot na zewnątrz obiektu. Podobnie jak w przypadku wiatru działającego na flagę tu siła ciśnienia — pomimo że fizycznie działa na całą ściankę — zostanie przez nas przyłożona tylko do punktów materialnych, które do nich przynależą.

2.9.5. Objętość zamkniętej bryły

Ciśnienie wewnątrz obiektu obliczamy, wykorzystując wprost wzór (2.22), w którym musimy znać jego objętość. Można tu zastosować różne podejścia: obudowanie bryłą przybliżającą kształt, specjalne sumowanie (całka po powierzchni) wkładu ze wszystkich ścian obiektu lub użycie biblioteki zewnętrznej²⁵.

W najprostszym podejściu objętość obiektu można przybliżyć opisanymi na nich bryłami, których objętość znamy (prostopadłościan, sfera, elipsoida). W tym celu należy wykonać pętlę po wszystkich punktach obiektu i wyznaczyć minimalne i maksymalne wartości wszystkich składowych położeń punktów w trzech wymiarach. Nazwijmy je $xmin$, $xmax$, $ymin$, $ymax$ oraz $zmin$, $zmax$. Znajomość tych wielkości pozwala przybliżyć objętość:

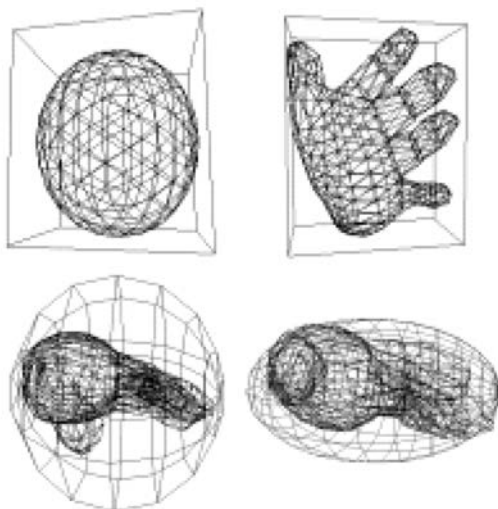
$$V = (xmax-xmin) \cdot (ymax-ymin) \cdot (zmax-zmin)$$

Na rysunku 2.52 znajduje się przykład przybliżenia ciała miękkiego przez prostopadłościan wyznaczony według tego prostego algorytmu. Przybliżenie można też wykonać, używając innych brył (sfer, elipsoid), dla których znamy wzór na objętość. Sposób ten działa dość dobrze dla wszelkich obiektów o zwartej budowie, możliwie dobrze przybliżanej przez wybraną bryłę, których odkształcenia są widoczne na całym obiekcie. Taką procedurę należy oczywiście wykonać zawsze przed wyliczeniem sił dla naszego obiektu. Dla obiektów sferycznych, typu piłka, najlepszym przybliżeniem będzie sfera lub elipsoida, których środek jest wyznaczony jako środek opisanego na nich prostopadłościanu, a promienie z wartości minimum i maksimum dla poszczególnych składowych. W przypadku dwuwymiarowym sytuacja jest analogiczna, tylko zamiast brył trójwymiarowych do opisu używamy figur 2D.

²⁵ Na przykład GNU Triangulated Surface Library: <http://gts.sourceforge.net/>.

Rysunek 2.52.

Obiekt kuli
obudowany
sześciannem
oraz obiekt ręki,
na którym
obudowana została
bryła (ang. bounding
box) w celu
przybliżenia
objętości. Autorem
obiektu jest Mariusz
Jarosz. Rysunek
pochodzi z pracy [23]



Omówiony wyżej algorytm obliczania objętości jest narażony na niedokładności, szczególnie w przypadku brył o skomplikowanych kształtach, które nie są łatwo przybliżane przez bryły podstawowe. Dlatego omówimy też inny sposób obliczania objętości — wprost z prawa Gaussa-Ostrogradskiego, które mówi, że całka po objętości z dywergencji pola wektorowego może zostać przybliżona przez całkę z pola wektorowego policzoną po powierzchni otaczającej tę objętość²⁶²⁷. Zdaję sobie sprawę, że dla czytelnika nieobeznanego z matematyką to zdanie było chyba najtrudniejsze w całej książce, zachęcam jednak do analizy poniższego wyprowadzenia, bo na koniec czeka nas nagroda w postaci prostego wzoru na objętość (suma po trójkątach lub odcinkach naszego obiektu). Tu będziemy pracować z modelem trójwymiarowym. Rozpocznijmy zatem od wspomnianego prawa Gaussa-Ostrogradskiego, które możemy zapisać w postaci:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} d\vec{S}$$

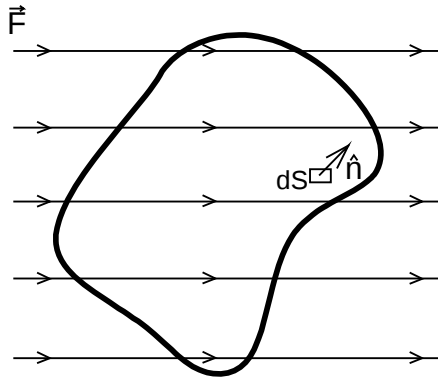
gdzie $\vec{F}$ jest polem wektorowym, V objętością obiektu (stąd całka po lewej stronie przebiega po całym obiekcie), a $d\vec{S}$ jest infinitesimalnym elementem powierzchni przemnożonym przez wektor normalny do niej, czyli $d\vec{S} = \hat{n} dS$ gdzie $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ jest wektorem normalnym, a dS jest polem tej powierzchni (patrz rysunek 2.53).

²⁶ Oczywiście samo twierdzenie istniało dużo wcześniej, ale idea wykorzystania go do liczenia objętości ciał miękkich pochodzi od Josa Stama, który zaproponował takie rozwiązanie z polem $(x, 0, 0)$ w trakcie dyskusji po moim wystąpieniu z wykładem o ciałach miękkich w ramach konferencji SIGRAD w 2003 roku w Umei (<http://panoramx.ift.uni.wroc.pl/~maq/talks/sigrad03.php>).

²⁷ Patrz również: <https://stackoverflow.com/questions/1406029/how-to-calculate-the-volume-of-a-3d-mesh-object-the-surface-of-which-is-made-up>.

Rysunek 2.53.

Obiekt zanurzony
w polu wektorowym
o składowych $(x, 0, 0)$,
oznaczony element
infinitesimalny na
powierzchni oraz
wektor normalny



W tym momencie wykonamy założenie o polu $\vec{F}$, które będzie teraz wynosić $\vec{F} = (x, 0, 0)$, dzięki czemu dywergencja pod całką z lewej strony znika, tzn. $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, a po prawej stronie zostanie nam $\vec{F} d\vec{S} = x n_x dS$, stąd dla obiektu o zamkniętej powierzchni, złożonego z NUMT trójkątów numerowanych indeksami i , o polach S_i mamy wzór na objętość:

$$V = \iiint_V dV = \oint_S x n_x dS \cong \sum_{i=1}^{NUMT} x_i n_{x,i} S_i \quad (2.24)$$

gdzie suma po prawej stronie przebiega po wszystkich trójkątach, x_i jest składową x danego trójkąta (np. jednego z jego wierzchołków lub średniej), a $n_{x,i}$ jest składową x wektora normalnego do tego trójkąta.

Podobny wzór można łatwo wyprowadzić dla przypadku dwuwymiarowego, obniżając stopień całkowania²⁸. Otrzymujemy wtedy wzór na pole powierzchni:

$$S = \iint_S dS = \oint_l x n_x dl = \sum_{i=1}^{NUML} x_i n_{x,i} l_i \quad (2.25)$$

gdzie S jest powierzchnią ciała dwuwymiarowego, a l jest elementem liniowym na konturze obiektu.

Ze względu na specyficzną budowę naszych obiektów, które składają się ze skończonych, dyskretnych elementów na powierzchni (punkty połączone sprężynkami lub małe ścianki

²⁸ Takie wyprowadzenie można znaleźć np. w <http://panoramx.ift.uni.wroc.pl/~maq/soft2d/node17.html>.

trójkątne, z których budowana jest powierzchnia ciała), implementacja powyższych wzorów nie jest trudna. Sprowadza się ona do wykonania pętli po elementach powierzchni i wykonania sumy ze wzorów (2.24) lub (2.25). Poniżej przedstawiam fragment kodu wprost z programu do symulacji tego modelu, w którym objętość liczona jest wprost ze wzoru (2.24). W poniższym przykładzie objętość (volume) obliczamy jako sumę po trójkątnych elementach powierzchni (Faces) złożonych z punktów p1, p2 i p3. Do objętości wchodzi pozycja punktów na jednej wybranej osi (tu jest to kierunek x) przemnożone przez odpowiednią składową wektora n (normalnego do powierzchni) oraz przez pole powierzchni S trójkąta (w kodzie jest to składowa Area).

```
volume = 0;
for(int i=0 ; i< Faces.size() ; i++)
{
    volume += ( Faces[ i ].p1->r.x + Faces[ i ].p2->r.x + Faces[ i ].p3->r.x ) *
               Faces[ i ].n.x * Faces[ i ].Area / 3.0;
}
```

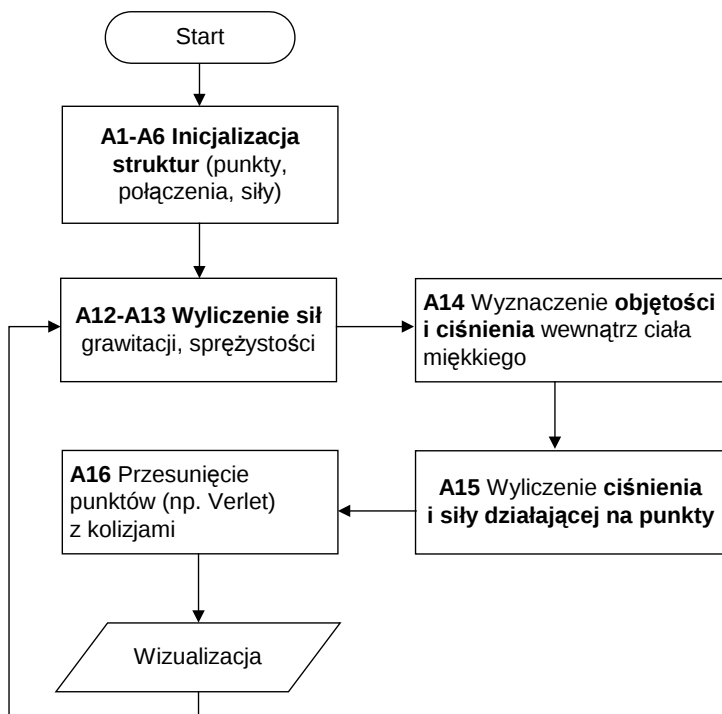
W powyższym kodzie C++ wektor normalny i powierzchnia powinny być dynamicznie obliczane dla każdego z trójkątów w trakcie ruchu obiektu.

2.9.6. Algorytm symulacji ciała miękkiego

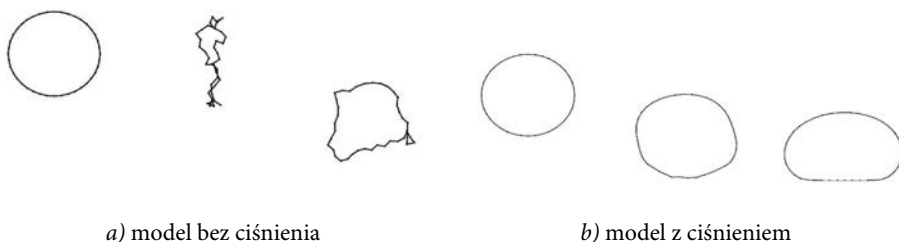
Algorytm działania modelu ciała miękkiego jest podobny do przedstawionego wyżej algorytmu dla tkaniny, z tą różnicą, że uwzględniamy teraz siłę pochodzącą od różnicy ciśnień między wewnątrz ciała a atmosferą (patrz rysunek 2.54).

Kluczowe różnice między algorytmami zwykłej tkaniny i ciała miękkiego zostały pogrubione — w pierwszej kolejności w procedurze tworzenia punktów i połączeń samego obiektu (punkt 1. algorytmu). Budowanie obiektu można zrealizować na wiele sposobów — zarówno generując obiekt ręcznie, jak i wczytując go z pliku w jednym z popularnych formatów (np. bardzo proste 3d Studio ASCII — patrz podpunkt 2.9.6.1).

Najistotniejszą zmianą w algorytmie dla ciał miękkich (rysunek 2.54) jest dodatkowa siła ciśnienia — wyliczana wprost ze wzoru (2.21) i kolejnych dla każdego punktu materialnego tworzącego powierzchnię ciała. Tu przyda się wiedza z zakresu grafiki komputerowej, ponieważ dla każdego punktu należy wyznaczyć wektor normalny (siłą rzeczy będący konsekwencją budowy całego ciała, tzn. normalna do wektora punktu jest uzależniona od normalnych ścian, które go tworzą — może to być np. prosta średnia po wektorach współtworzonych ścian). Przykład symulacji z uwzględnieniem ciśnienia dla dwuwymiarowej piłki pokazany jest na rysunku 2.55.



Rysunek 2.54. Algorytm symulacji ciała miękkiego z użyciem modelu cząstek i sprężynek oraz dodatkowej siły pochodzącej od różnicy ciśnień między wnętrzem a ciśnieniem atmosferycznym. Oznaczenia z literą A są znacznikami miejsca w kodzie omawianym w dalszych podrozdziałach



Rysunek 2.55. Zachowanie modelu w polu grawitacyjnym a) bez siły ciśnienia — widać, że łańcuch deformuje się, tracąc początkową objętość i kształt (film: <https://youtu.be/pPVE0kqO3xU>), b) z uwzględnieniem ciśnienia — łańcuch w przybliżeniu zachowuje zarówno objętość, jak i kształt (film: <https://youtu.be/XRpQsw8kzXo>)

W algorytmie uwzględniamy też kolizje, niezbędne przy piłkach i innych obiektach, które w polu grawitacyjnym mogą opadać np. na ziemię i się od niej odbijać. Tu możemy rozpatrywać kolizje ze ścianami, które mogą też być realizowane z uwzględnieniem jednostkowych kolizji punktów materialnych, jak w podpunkcie 2.5.2.3 (metody ogólne

wykrywania kolizji). W dalszej części przedstawimy też metodę uwzględniania przybliżonych kolizji z obiektami o kształcie sferycznym.

2.9.6.1. Format obiektów 3D Studio ASCII

Aby wczytać obiekt 3D z pliku zewnętrznego, można użyć np. formatu programu 3D Studio, który jest prostym formatem tekstowym. Oprócz typowego nagłówka, w którym określamy nazwę obiektu, liczbę ścian i wierzchołków, podajemy listę wierzchołków w przestrzeni 3D oraz indeksy punktów tworzących poszczególne ściany (A, B i C oznaczają kolejne wierzchołki trójkątów). Poniżej zamieszczam definicję sześcianu zapisanego w tym formacie. W pliku jest też kilka dodatkowych informacji (np. indeksy AB, BC i CA) oraz określenie stopnia wygładzenia (smoothing), jednak nie są one używane do zdefiniowania podstawowych obiektów.

```
----- start cube.asc
Named object: "Cube"
Tri-mesh, Vertices: 8 Faces: 12
Vertex List:
Vertex 0: X:-1.0   Y:1.0   Z:1.0
Vertex 1: X:-1.0   Y:-1.0  Z:1.0
Vertex 2: X:1.0    Y:1.0   Z:1.0
Vertex 3: X:1.0    Y:-1.0  Z:1.0
Vertex 4: X:1.0    Y:1.0   Z:-1.0
Vertex 5: X:1.0    Y:-1.0  Z:-1.0
Vertex 6: X:-1.0   Y:1.0   Z:-1.0
Vertex 7: X:-1.0   Y:-1.0  Z:-1.0
Face list:
Face 0: A:0 B:1 C:2 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 1: A:1 B:3 C:2 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 2: A:2 B:3 C:4 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 3: A:3 B:5 C:4 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 4: A:4 B:5 C:6 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 5: A:5 B:7 C:6 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 6: A:6 B:7 C:0 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 7: A:7 B:1 C:0 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 8: A:6 B:0 C:4 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 9: A:0 B:2 C:4 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 10: A:1 B:7 C:3 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
Face 11: A:7 B:5 C:3 AB:1 BC:1 CA:1
Smoothing: 1
----- koniec cube.asc
```

Proste obiekty (powierzchnie, kule) można wygenerować proceduralnie, ale jeśli naszym celem jest animacja ciał miękkich o kształtach odpowiadających rzeczywistym obiektom, może być niezbędne ich wykonanie w zewnętrznym oprogramowaniu. Wczytując obiekt z zewnątrz, należy pamiętać o dodaniu sprężyn, które zwykle nie występują w obiekcie wyeksportowanym na potrzeby grafiki komputerowej (np. w obiektach graficznych istnieją połączenia między najbliższymi sąsiadami, ale z dalszymi już nie, a mogą być potrzebne). Ze względu na własności modelu ważne jest też, aby obiekt do symulacji był zbudowany z trójkątów o względnie podobnej powierzchni²⁹.

2.9.7. Kod źródłowy symulacji ciał miękkich — HTML5

Omówimy teraz pełny kod źródłowy symulacji ciała miękkiego oparty na algorytmie przedstawionym w podpunkcie 2.9.6. Przedstawimy tu wersję kodu w dwóch wymiarach. Kod komputerowy znajduje się na serwerze FTP³⁰ Helionu oraz na stronie domowej autora³¹. Kod napisany został w języku JavaScript z użyciem elementu Canvas. Całość zapisana jest w pliku o nazwie *softbody.html*. Aby go uruchomić, wystarczy otworzyć go w dowolnej przeglądarce (Firefox, Opera, Chrome i inne).

Czytelników nieobeznanych z językiem HTML5 może dziwić nazwa pliku (*.html*), nie jest to jednak nic nietypowego. Nasz program został napisany w taki sposób, że jest zwyczajną stroną internetową zawierającą element typu Canvas (płótno), na którym rysują procedury z języka JavaScript. Plik *softbody.html* jest zbudowany w następujący sposób:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<head>
  <title>Soft Body JS, Maciej Matyka</title>
```

Po utworzeniu nagłówka i wpisaniu tytułu strony przechodzimy do opisu tzw. metadanych:

```
  <meta name="description" content="Prosty kod symulacji ciała miękkiego przygotowany
na potrzeby ilustracji rozdziału o modelu soft body w książce 'Symulacje komputerowe
w fizyce, wydanie 2 - rozszerzone'. Kod realizuje symulację modelu z ciśnieniem z użyciem
całkowania metodą Verleta.">
</head>
<body>
```

Tu rozpoczyna się właściwa strona internetowa. Najpierw tworzymy płótno, a następnie umieszczamy na stronie skrypt w języku JavaScript:

²⁹ Ciekawe efekty może dać zabawa z zagęszczaniem i rozrzedzaniem trójkątów na powierzchni, bo taka modyfikacja powoduje, że pojawiają się niejednorodne własności fizyczne. W ten sposób można prawdopodobnie uzyskać efekt wydmuchiwania różnych kształtów itp.

³⁰ <ftp://ftp.helion.pl/przyklady/sykof2.zip>

³¹ <http://panoramix.ift.uni.wroc.pl/~maq/sykofi2/>

```

<!-- płótno do rysowania-->
<canvas id="mycanvas" width="400" height="300"></canvas>
<!-- tekst programu -->
<script type="text/javascript">

    //... tu umieszczony będzie kod JavaScript (punkt 2.9.7.1 i następne)

</script>
</body>
</html>

```

Po przepisaniu powyższego kodu HTML wraz z opisanymi poniżej procedurami należy zapisać całość w pliku z rozszerzeniem *.html*.

Omówienie kodu JavaScript, który powinien być umieszczony między znacznikami `<script ..> a </script>`, zaczniemy od bloku danych globalnych.

2.9.7.1. Blok danych globalnych

```

// A1 - stałe w programie
var W = 400;           // rozmiar ekranu
var H = 300;
var NUMP = 17;         // liczba punktów
var NUMS = 0;          // liczba sprężyn
var R = 30;            // promień ciała

```

W części pierwszej kodu (A1) definiujemy rozmiary płótna do rysowania. Ponieważ w tej wersji programu ciało do symulacji zostanie wygenerowane z kodu, w dalszej części podajemy liczbę punktów na powierzchni (NUMP), a liczbę sprężyn (NUMS) pozostawiamy wyzerowaną do późniejszego uzupełnienia. Na koniec ustawiamy promień ciała (R).

```

// A2 - wielkości fizyczne
var Pressure = 0;      // początkowe ciśnienie
var PMAX = 6890000;    // ciśnienie docelowe
var KS = 400, KD = 15; // stała sprężystości i stała tłumienia dla
sprężyny
var g = -9.8;          // przyspieszenie grawitacyjne
var m = 4;             // masa pojedynczego punktu na powierzchni ciała

```

Stałe fizyczne zdefiniowane są w części (A2), gdzie podajemy ciśnienie docelowe (PMAX), ciśnienie aktualne (Pressure) oraz stałe sprężystości (KS) i tłumienia (KD) dla połączeń sprężystych na powierzchni. Wszystkie stałe są dobrane bardziej w celu uzyskania poprawnego efektu graficznego i płynnej, stabilnej animacji niż w celu odtworzenia jakiejś konkretnej sytuacji fizycznej. Można oczywiście dobrać stałe tak, aby odzwierciedlały prawdziwy układ fizyczny. Należy wtedy pamiętać o jednolitym układzie jednostek.

```

// A3 - stan obiektu
var x=[], y=[];        // pozycje
var vx=[], vy=[];      // prędkość punktów
var fx=[], fy=[];      // siły
var nx=[], ny=[];      // wektory normalne
var springs=[];

```

W części (A3) zawarte są tablice z danymi. To tu przechowujemy pozycje punktów (x , y), prędkości (v_x , v_y), siły działające na punkty (f_x , f_y) oraz normalne do punktów (n_x , n_y — liczone one będą z połączeń sprężystych, do których należą punkty). Oprócz tego w tym miejscu trzymamy masę i specjalną tablicę springs, która będzie zawierała definicję wszystkich sprężyn. Wypada wyjaśnić, że ze względu na brak możliwości definiowania obiektów i przeciążania operatorów w podstawowym języku JavaScript struktury, których używamy, są po prostu tablicami jednowymiarowymi. W przypadku bardziej złożonych typów stosujemy prostą metodę trzymania zmiennych jedna za drugą. Przykładowo jeden wpis do tablicy springs zawiera trzy pola: indeks pierwszego punktu, indeks drugiego i odległość w położeniu równowagi. Dlatego w przypadku próby przejścia do odpowiedniego miejsca w tablicy sprężyn należy przemnożyć indeks sprężyny przez 3.

```
// A4 - dane do całkowania
var xm1 = [], ym1 = [];           // kopie punktów dla metody Verlet
var xp1 = [], yp1 = [];
var verletInitialized = 0;        // czy wykonano pierwszy krok metody całkowania?
var dt = 0.08;
```

W dalszej części (A4) mamy dane potrzebne do całkowania równań ruchu. Oprócz tablic, w których przechowujemy pozycje punktów o krok wstecz względem aktualnych ($xm1$, $ym1$), oraz tablic dla pozycji dla kroku o jeden w przód ($xp1$, $yp1$), mamy tu zmienną `verlet` $\rightarrow$ `Initialized`, od której zależy, czy wykonamy tzw. zerowy krok całkowania, niezbędny w używanym schemacie Verleta³². Ustawiamy tu też krok czasowy `dt`, używany w procedurze całkowania. Krok tu równy 0.03 można delikatnie zmieniać. Wartość dobieramy, uwzględniając własności ciała, np. większe stałe sprężystości i tłumienia dla sprężyn wymagają mniejszych kroków całkowania, aby symulacja była stabilna. Podobnie większe ciśnienia narażają symulację na niebezpieczeństwo utraty dokładności. Niestety, zmniejszanie `dt` do bardzo małych wartości nie jest rozwiązaniem uniwersalnym, bo prowadzi do spowolnienia animacji (mniejsze kroki oznaczają, że trzeba ich wykonać więcej). Cała sztuka polega na dobraniu dobrej i kompromisowej wartości kroku czasowego.

```
// A5 - dane dodatkowe
var ctx;
var logo = new Image();
```

Kolejne dwie linijki to dodatkowe zmienne, które zostaną za chwilę zainicjalizowane; `ctx` będzie oznaczać kontekst płótna, czyli specjalny obiekt, z użyciem którego będziemy mogli rysować po płótnie (będzie on zawierać wszelkie procedury i dane potrzebne do rysowania). Obiekt `logo`, który od razu inicjalizujemy przez wywołanie operatora `new Image`, będzie zawierał niewielkie logo związane z tematyką tej książki. W dalszej części zajmiemy się definicją podstawowych funkcji używanych przez główną pętlę symulacji.

³² https://pl.wikipedia.org/wiki/Algorytm_Verleta

2.9.7.2. Inicjalizacja i funkcje pomocnicze

Kolejnym elementem kodu (A6) jest implementacja funkcji `window.onload`, która zostanie wykonana po pierwszym załadowaniu strony.

```
// A6 - inicjalizacja - uruchom po załadowaniu strony
window.onload = function()
{
    // pobierz identyfikatory dla płótna
    var canvas = document.getElementById('mycanvas');
    canvas.width = W;           // ustaw wielkość płótna
    canvas.height = H;
    ctx = canvas.getContext('2d');

    // stwórz model
    CreateModel();

    // załaduj logo
    logo.src = 'logo.jpg';

    // pierwsze wywołanie pętli
    loop();
}
```

W powyższej funkcji inicjalizujemy strukturę (obiekty) płótna i kontekstu (`ctx`), ustawiając przy okazji żadaną wielkość płótna. W dalszej części wywołujemy funkcję, która ustawi punkty i zdefiniuje połączenia sprężyste na obwodzie (`CreateModel`). Na koniec ładujemy logotyp w formacie *.jpg* (jest on tu w celu identyfikacji i wzbogacenia graficznego) oraz wywołujemy po raz pierwszy pętlę główną symulacji (`loop`).

Ważną procedurą pomocniczą, dość często wywoływaną w programie, będzie obliczanie odległości między dwoma wektorami.

```
// A7 - Odległość dwóch wektorów
function dist(_x1, _y1, _x2, _y2)
{
    return Math.hypot(_x1 - _x2, _y1 - _y2);
}
```

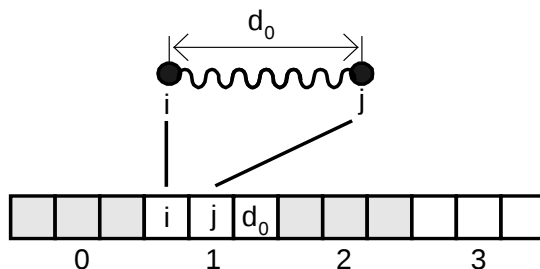
Użyta tu funkcja `Math.hypot` wyznacza pierwiastek sumy kwadratów swoich dwóch argumentów. W dalszej kolejności implementujemy funkcję dodającą sprężynę.

```
// A8 - funkcja dodająca sprężynę
function AddSpring( i, j )
{
    springs[ NUMS*3 + 0 ] = i;    // punkt 1
    springs[ NUMS*3 + 1 ] = j;    // punkt 2
    springs[ NUMS*3 + 2 ] = dist(x[i], x[j], y[i], y[j]); // odległość w stanie równowagi
    NUMS++;                      // sprężyna została dodana
}
```

Pobiera ona dwa parametry, którymi są indeksy łączonych punktów. Używamy tu jednowymiarowej tablicy do przechowywania sprężyn, które są opisywane przez 3 wielkości: indeks punktu 1, indeks punktu 2 (są to indeksy w tablicy punktów) oraz długość sprężyny w stanie równowagi (d_0). Długość d_0 liczymy jako odległość od punktu 1 do punktu 2. Ze względu na użycie tablicy jednowymiarowej indeksujemy ją w specyficzny sposób. Najpierw przesuwamy się w niej o $\text{NUMS} \times 3$ pozycji, następnie dodajemy 0, 1 lub 2, aby wpisać odpowiednią składową sprężyny o indeksie $\text{NUMS} + 1$. Mnożenie razy 3 jest tu po to, aby przesuwać się o całe struktury sprężyn do przodu (patrz rysunek 2.56, ilustrujący przesunięcie się w tablicy springs).

Rysunek 2.56

Pojedyncza sprężyna, wielkości, które ją opisują, i umiejscowienie w tablicy jednowymiarowej (tu struktura sprężyny o indeksie 1)



```
// A9 - Stwórz model, punkty i sprężyny
function CreateModel()
{
    for(var i=0 ; i < NUMP ; i++)          // punkty na obwodzie
    {
        x[i] = R * Math.sin(i * (2.0 * Math.PI) / NUMP )+W/2;
        y[i] = R * Math.cos(i * (2.0 * Math.PI) / NUMP )+H/2;
        vx[i] = vy[i] = 0;
    }

    for(var i=0 ; i < NUMP-1 ; i++)        // tworzymy sprężyny
        AddSpring(i,i+1);
    AddSpring(i,0);
}
```

Kolejna procedura najpierw wypełnia wprowadzoną wcześniej tablicę punktów punktami rozłożonymi równomiernie na obwodzie koła o promieniu R . Prędkości punktów są zerowane, ustawiamy jednostkową masę. Po utworzeniu punktów należy je połączyć sprężynami. Tu z pomocą przychodzi nam wprowadzona przed chwilą procedura, którą wykonujemy dla każdej pary $(i, i+1)$ punktów uprzednio rozłożonych obok siebie. Na koniec łączymy punkt pierwszy z ostatnim $(i,0)$.

```
// A10 - Procedury graficzne
function line(x1,y1, x2,y2)
{
    ctx.beginPath();
    ctx.moveTo(x1, y1);
    ctx.lineTo(x2, y2);
    ctx.stroke();
}
```

```

}

function resetView()
{
  ctx.clearRect(0,0,W,H);      // czyść ekran
  ctx.strokeStyle = "rgb(0,0,0)"; // ustaw styl linii
}

```

Kolejne dwie procedury pomagają w rysowaniu. Pierwsza z nich (`line`) pobiera cztery parametry: po dwie współrzędne początku i końca linii i rysuje linię na płótnie (kontekst `ctx` z elementu `canvas`) z użyciem procedur wbudowanych w język HTML5. Druga z nich (`resetView`) czyści ekran i ustawia styl linii (kolor czarny).

2.9.7.3. Pętla symulacji

Kluczową częścią programu jest nieskończona pętla symulacji, której implementacja ma następującą postać:

```

// A11 - pętla symulacji
loop=function()
{
  ... // tu wywołujemy procedury pętli

  requestAnimationFrame(loop); // wykonaj pętlę jeszcze raz
}

```

W pętli symulacji po wykonaniu wszystkich operacji na końcu wywołujemy specjalną funkcję `requestAnimationFrame`, która spowoduje ponowne wywołanie funkcji z argumentu. Według dokumentacji typową częstotliwością tych wywołań będzie 60 fps (klatek na sekundę), ale to zależy zarówno od odświeżania przeglądarki, jak i od zawartości pętli. Jeśli będziemy mieli dużo operacji do wykonania lub wiele obiektów do narysowania, przeglądarka internetowa nie będzie w stanie tak szybko wywoływać pętli i liczba klatek na sekundę (a zatem płynność animacji) ulegnie zmniejszeniu. W dalszej części omówimy zawartość pętli symulacji, która składa się z trzech części: liczenia sił, całkowania oraz rysowania aktualnego stanu.

2.9.7.4. Obliczenia sił

Obliczenia sił rozpoczynamy od najprostszej siły ciężkości, która jest związana z przyspieszeniem grawitacyjnym. W naszym układzie siła działa w kierunku y .

```

// A12 - siła ciężkości
for(var i=0; i<NUMP; i++)
{
  fx[i] = 0;
  fy[i] = -m*g;
}

```

Pętlę wykonujemy po wszystkich punktach tworzących ciało miękkie i każdemu przypisujemy wektorowo siłę $F_g = (0, m \cdot g)$, gdzie m jest masą punktu, a g jest przyspieszeniem grawitacyjnym.

Kolejna część funkcji, bardziej rozbudowana, dotyczy obliczeń sił sprężystości działających pomiędzy punktami na powierzchni ciała. Rozpoczynamy od zdefiniowania potrzebnych zmiennych:

```
// A13 - siła sprężystości
var x1,x2,y1,y2;
var fs;           // siła sprężystości
var dvx, dvy;     // różnica prędkości
var Fx, Fy;       // wartości siły
```

Dalej przechodzimy do pętli po wszystkich sprężynach i odczytujemy indeksy punktów początkowego i końcowego (p1 i p2) oraz odległość w stanie równowagi (d0). Następnie pobieramy współrzędne i obliczamy długość sprężyny.

```
for(var i=0 ; i < NUMS ; ++i)           // pętla po sprężynach
{
  var p1 = springs[i*3+0];               // indeks punktu 1
  var p2 = springs[i*3+1];
  var d0 = springs[i*3+2];               // odległość równowagowa

  x1 = x[ p1 ];  y1 = y[ p1 ];           // współrzędne punktów
  x2 = x[ p2 ];  y2 = y[ p2 ];
  var d = dist(x1, y1, x2, y2);           // długość sprężyny
```

W zależności od tego, czy obliczona długość jest większa od 0, obliczamy interesującą nas siłę. Najpierw wyznaczamy wektor jednostkowy skierowany od punktu 2 do punktu 1 (patrz rysunek 2.57). Nasz model zakłada, że na powierzchni ciał oprócz sił sprężystości występuje też tłumienie uzależnione od różnicy prędkości między punktami, dlatego w dalszej kolejności obliczamy różnicę prędkości dv , której potrzebujemy, aby móc wyznaczyć tłumienie (patrz wzór 2.18).

```
if(d > 0)
{
  var tx = (x1 - x2) / d;               // wektor jednostkowy
  var ty = (y1 - y2) / d;               // od punktu 2 do 1

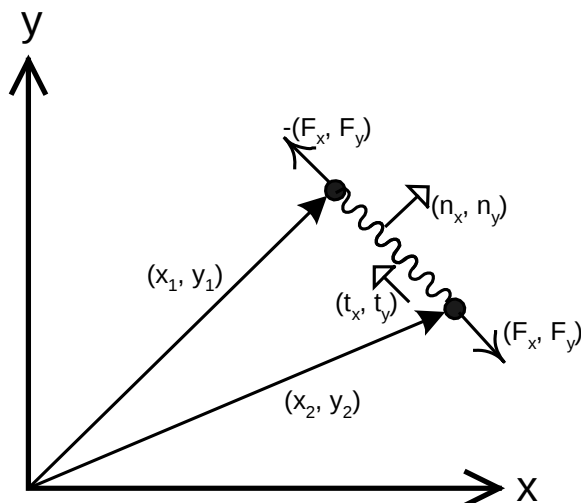
  dvx = vx[p1] - vx[p2];                // różnica prędkości
  dvy = vy[p1] - vy[p2];

  fs = (d - d0)*KS;                     // siła sprężystości Hooke'a
  fs = fs + ( dvx * tx + dvy * ty ) * KD; // tłumienie sprężyny (wzór 2.18)
```

W kolejnym kroku obliczamy obie składowe siły sprężystości (F_x , F_y) i przypisujemy te wartości do sił działających na oba punkty (oczywiście ze zmienionym znakiem). Na koniec wyznaczamy wektor normalny (n_x i n_y), obracając wektory tx i ty o 90 stopni.

```
Fx = tx * fs;                           // wartość siły "x"
Fy = ty * fs;

fx[ p1 ] -= Fx;  y[ p1 ] -= Fy;          // dodaj siłę dla punktu 1
fx[ p2 ] += Fx;  fy[ p2 ] += Fy;          // jw. dla punktu 2
```



Rysunek 2.57. Pojedyncze połączenie sprężyste — oznaczenia wektorów i sił. Strzałki z pełnymi grotami oznaczają wektory pozycji punktów, groty otwarte to wektory jednostkowe. Siły oznaczone są grotami zakrzywionymi, osie zwykłymi strzałkami. Na ilustracji mamy sytuację ściśniętej sprężyny (stąd siły działające „na zewnątrz”)

```

    nx[i] = ty;                // wyznacz wektor normalny z obrotu
    ny[i] = -tx;              // tx,ty
} // warunek d>0
} // pętla po sprężynach (for)

```

Po zakończeniu powyższej pętli po sprężynach w siłach działających na punkty uwzględnione są już oddziaływania sprężyste. Ponieważ symulujemy ciało miękkie, musimy dodać jeszcze siłę pochodzącą od różnicy ciśnień między gazem wewnątrz a ciśnieniem atmosferycznym (patrz algorytm na rysunku 2.54). Pierwszym krokiem będzie obliczenie objętości (ang. *volume*) ciała.

```

// A14 - objętość ciała
var volume = 0;
for(var i=0 ; i<NUMS ; i++)
{
    var p1 = springs[i*3+0];        // pobierz punkty sprężyny
    var p2 = springs[i*3+1];
    x1 = x[ p1 ];    y1 = y[ p1 ]; // współrzędne punktów
    x2 = x[ p2 ];    y2 = y[ p2 ];
    d = dist(x1, y1, x2, y2);       // długość sprężyny
    volume += 0.5 * Math.abs(x1 - x2) * Math.abs(ny[i]) * (d); // wzór 2.25 z 2.9.5
}

```

W celu obliczenia objętości sumujemy wkłady od wszystkich ścianek ciała (tu ścianką jest każda sprężynka na obwodzie). W pętli najpierw pobieramy współrzędne punktu 1 i 2, a następnie obliczamy aktualną długość sprężyny *i*, korzystając z wzoru (2.25) z punktu 2.9.5, obliczamy kolejne przyczynki do objętości. Objętość wykorzystamy dalej do obliczenia

sił ciśnienia. Najpierw jednak wykonamy „pompowanie” ciała, ustalając ciśnienie gazu na wartość od 0 do PMAX z krokiem $0.01 \cdot \text{PMAX}$. Takie dodawanie jest potrzebne, bo gwałtowne ustalenie ciśnienia na PMAX na początku symulacji spowoduje, że staje się ona niestabilna. Dodając je powoli, uzyskamy płynne przejście do obiektu nadmuchanego.

```
// pompowanie
if (pressure < PMAX)
    pressure = pressure + 0.01 * PMAX;
```

W dalszej części obliczamy ciśnienie, korzystając z równania stanu gazu doskonałego.

```
// A15 - ciśnienie
var pressurev;
for (i=0 ; i<NUMS ; i++)
{
    var p1 = springs[i*3+0];           // pobierz punkty sprężyny
    var p2 = springs[i*3+1];
    x1 = x[ p1 ];      y1 = y[ p1 ];   // współrzędne punktów
    x2 = x[ p2 ];      y2 = y[ p2 ];
    d = dist(x1, y1, x2, y2);           // długość sprężyny
    pressurev = 0.5 * d * pressure * (1.0/volume); // wartość siły ciśnienia
    fx[ p1 ] += nx[i] * pressurev;      fy[ p1 ] += ny[i] * pressurev; // siła
    fx[ p2 ] += nx[i] * pressurev;      fy[ p2 ] += ny[i] * pressurev;
}
```

Po standardowym pobraniu współrzędnych wykonujemy sumowanie wkładu ciśnienia od wszystkich ścianek. Wartość ciśnienia (pressurev), zgodnie z wzorami, których używamy (patrz podpunkt 2.9.4), będzie odwrotnie proporcjonalna do objętości ciała (im mniejsza objętość, tym większe ciśnienie na ścianki). Dodatkowo mnożymy siłę przez długość sprężyny, aby uwzględnić, że siła działa na jednostkę powierzchni. Tak obliczona wartość siły jest dzielona przez 2, mnożona przez wektor normalny do powierzchni oraz dodawana (wektorowo) do obu punktów tworzących daną sprężynkę.

2.9.7.5. Metoda całkowania Verleta i kolizje

Przechodzimy teraz do kroku całkowania, w którym wykorzystamy algorytm Verleta. Jest to metoda numeryczna rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, która cechuje się większą stabilnością niż metody Eulera oraz zachowuje energię układu [27]. Jej cechą szczególną jest to, że wymaga zapamiętania jednego kroku wstecz, czyli oprócz kroku n musimy pamiętać stan układu w kroku $n-1$. Wzorem, jaki wykorzystamy do wyznaczenia nowego położenia wszystkich punktów, jest metoda Verleta bez prędkości:

$$x_{n+1} = 2 \cdot x_n - x_{n-1} + dt^2 \cdot f_x / m \quad (2.26)$$

$$y_{n+1} = 2 \cdot y_n - y_{n-1} + dt^2 \cdot f_y / m$$

Jak w takim razie wykonać pierwszy krok całkowania, skoro startujemy z warunków początkowych, które są określone tylko dla czasu $t = 0$? W tym celu wykorzystamy pojedynczy krok całkowania metodą Eulera, który opisuje wzór:

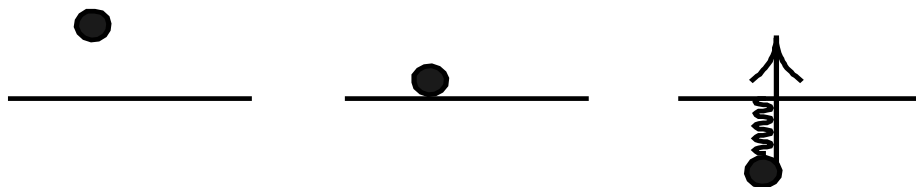
$$x_{n+1} = x_n + dt^2 \cdot f_x / m \quad (2.27)$$

$$y_{n+1} = y_n + dt^2 \cdot f_y / m$$

Zacniemy zatem od kodu kroku inicjalizującego, który wykonany zostanie tylko raz, przy pierwszym wywołaniu procedury całkującej.

```
// A16 całkowanie
if(verletInitialized == 0)
{
    verletInitialized = 1;
    for(var i=0; i<NUMP; i++)
    {
        xp1[i] = x[i]+dt*dt*fx[i]/m;    // wzór (2.27)
        yp1[i] = y[i]+dt*dt*fy[i]/m;
    }
} else
```

W dalszej części całkujemy równania z użyciem wzoru (2.27), który będzie używany w kolejnych iteracjach pętli (stąd else, które wykorzystuje zmienną `verletInitialized` i po pierwszym wywołaniu będzie już nas zawsze przenosić do właściwego całkowania). Oprócz całkowania metodą Verleta w tym miejscu zostanie też dołożona dodatkowa siła, wynikająca ze zderzenia z powierzchnią (`YBOTTOM`). Potrzebne jest tu kilka słów wyjaśnienia, bo w celu obsługi tego zderzenia wykorzystaliśmy inną technikę niż do tej pory stosowana w tej książce. Ponieważ mamy do czynienia z ciałem miękkim, zamiast odbijać punkty od twardej powierzchni, założyliśmy tu, że jest ona również miękka.



Rysunek 2.58. Wirtualna sprężynka pojawiająca się przy zderzeniu ze ścianą. Ilustracja prezentuje trzy momenty: przed kolizją (po lewej), przy zetknięciu ze ścianą (na środku) i w trakcie kolizji (po prawej). Siła pochodząca od wirtualnej sprężynki ma tutaj niezerową tylko składową y . Model jest jednak bardziej ogólny i takie wirtualne sprężynki można stosować dla dowolnej ściany (również zakrzywionej)

Dlatego odbicie jest realizowane przez dodanie dodatkowej, wirtualnej sprężynki (patrz rysunek), która „pojawia się” wtedy, kiedy punkt wykroczy poza dozwolony obszar (czyli tu poniżej wartości `y` `YBOTTOM`). Będzie to taka sama sprężynka jak na powierzchni ciała, ale o innym współczynniku sprężystości (tu nazywa się on `KSCOLLISION`). Wartość siły pochodzącej od tej wirtualnej sprężyny obliczamy wprost z prawa Hooke’a:

$$f_{\text{virtual}} = -KSCOLLISION \cdot (y - YBOTTOM)$$

W samym kodzie nałożenie tej dodatkowej siły wykonujemy tuż przed całkowaniem — oczywiście można zrobić to wcześniej, jednak ze względu na organizację kodu oraz historyczne użycie w nim odbić, a nie sił ta dodatkowa siła znajduje się w pętli całkującej.

```
{ // wykonuj tylko dla iteracji > 0
  var YBOTTOM = 50; // pozycja podłogi
  var KSCOLLISION = 220; // sprężystość przy odbiciu
  for(var i=0; i<NUMP; i++)
  {
    // wirtualna sprężyna (kolizje ze ścianą)
    if(y[i]<YBOTTOM) { fy[i] = fy[i] - KSCOLLISION*(y[i]-YBOTTOM);}

    // całkuj równania ruchu metodą Verlet
    xp1[i] = 2*x[i] - xm1[i] + dt*dt*fx[i]/m; // wzór (2.26)
    yp1[i] = 2*y[i] - ym1[i] + dt*dt*fy[i]/m;
  }
}
```

W kroku całkowania do wyznaczenia nowych wartości pozycji punktów (xp1, yp1) wykorzystujemy zarówno aktualny stan układu (x, y), jak i stan poprzedni (xm1, ym1). Dlatego po całkowaniu trzeba wykonać przeniesienie danych, bo w kolejnym kroku nowe pozycje staną się aktualnymi, a aktualne tymi z poprzedniego kroku, czyli:

```
x -> xm1,
y -> ym1,
```

oraz

```
xp1 -> x,
yp1 -> y.
```

Procedurę tę realizuje kod poniżej:

```
// A17 przepisanie stanów dla metody Verleta i obliczenie prędkości
for(var i=0; i<NUMP; i++)
{
  xm1[i] = x[i]; // x -> xm1
  ym1[i] = y[i];
  xp1[i] = xp1[i]; // xp1->x
  yp1[i] = yp1[i];

  vx[i] = (x[i] - xm1[i]) / (2*dt); // oblicz prędkość
  vy[i] = (y[i] - ym1[i]) / (2*dt);
}
```

Ponieważ w metodzie, której używamy, nie istnieje jawnie całkowanie dla prędkości, wykorzystujemy tę pętlę do wyznaczenia prędkości, biorąc średnią z prędkości bieżącej i poprzedniej.

2.9.7.6. Wizualizacja

W naszym przykładzie wizualizacja sprowadza się do narysowania linii łączących po kolei punkty ciała:

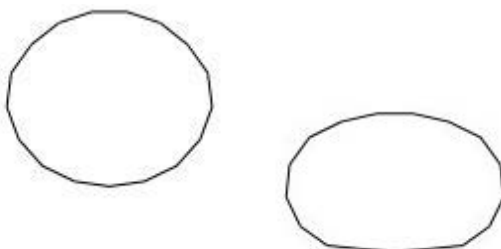
```
// A18 - rysowanie ciała na płótnie
resetView();

// rysuj ciało miękkie
for(i=0 ; i<NUMS ; i++)
{
    var p1 = springs[i*3+0];           // pobierz punkty sprężyny
    var p2 = springs[i*3+1];
    x1 = x[ p1 ];      y1 = y[ p1 ];   // współrzędne punktów
    x2 = x[ p2 ];      y2 = y[ p2 ];
    line(x1, y1, x2, y2);             // rysuj sprężynę
}

// narysuj logo
ctx.drawImage(logo,0,0);
```

W powyższej procedurze najpierw czyścimy płótno i ustawiamy kolor dla linii, a następnie rysujemy wszystkie połączenia sprężyste, iterując po tablicy springs. Na koniec, już poza pętlą, rysujemy logotyp (to oczywiście tylko ozdobnik).

Wyniki działania symulacji wykonanej opisanym kodem znajdują się na rysunku 2.59.

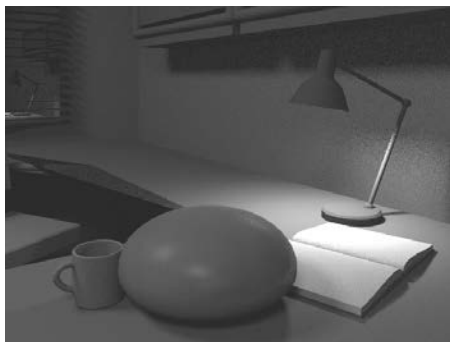


Rysunek 2.59. Symulacja ciała miękkiego z użyciem kodu omówionego w tym podrozdziale

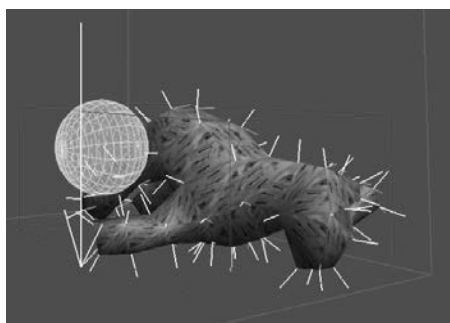
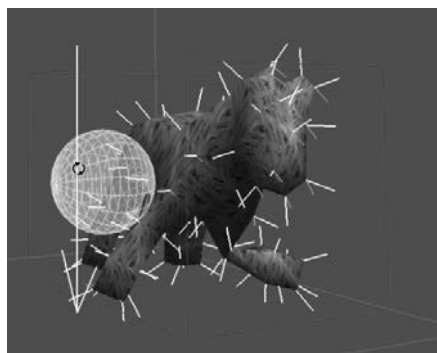
2.9.8. Przykłady symulacji

W tym podrozdziale prezentujemy symulacje trójwymiarowe, które realizują przedstawiony wcześniej algorytm. Symulacje zostały napisane z użyciem języka C++ i od strony rachunkowej i fizycznej nie różnią się wcale od implementacji przedstawionej w poprzednich podrozdziałach. Pierwszym przykładem jest nadmuchana piłka (2.60), której wizualizacja została dodatkowo wykonana metodą uwzględniającą oświetlenie i cienie.

Model ciał miękkich pozwala też na symulację brył o kształtach bardziej złożonych niż piłki. Obiekty złożone symulujemy, wczytując punkty i ściany z zewnętrznego pliku (można je też oczywiście wygenerować; możliwe są różne podejścia). Takie punkty mogą być jednak przygotowane w dowolnym programie graficznym 3D (np. Blender, 3D Studio, LightWave i inne) przez grafika komputerowego. Przykład takiej animacji — ruch nadmuchanego konia i interakcję z użytkownikiem — przedstawia rysunek 2.61.



Rysunek 2.60. Dmuchana piłka w polu grawitacyjnym, rendering metodą raytracingu monte carlo (autorem kodu programu do renderowania jest Kamil Trojan). Film: https://youtu.be/hMYNpS1_YOA



a) interakcja z użytkownikiem



b) ciało miękkie przyjmuje różne pozy

Rysunek 2.61. Model trójwymiarowego konia w symulacji ciała miękkiego a) w interakcji z użytkownikiem (sztywna biała sfera zderza się z punktami ciała miękkiego, białe linie to wektory normalne do punktów), b) rendering modelu w kilku pozach. Symulacja została wykonana programem Soft Body 2, który można znaleźć m.in. na stronie domowej autora: <http://panoramx.ift.uni.wroc.pl/~maq/eng/softbody.php>. Animacja: <https://youtu.be/bd5Z-t7mfcg>. Model trójwymiarowy stworzył Barnaba Mikułowski

Skorowidz

A

algorytm
 do symulacji
 ciała miękkiego, 113
 cieczy nieściśliwej, 202
 fali, 144
 flagi, 105
 powierzchni cieczy, 177
 ruchu wahadła, 29
flagowania komórek, 207
LBM-MRT, 297
metody
 Eulera, 16
 LBM, 231
 LBMTau1, 303
 RKIV, 42
mid-grid, 228
MidPoint, 40, 66
rozwiązywania kolizji, 129, 131
równanie
 falowe, 141
 Poissona, 209
 Schrödingera, 320, 321
ruchu cząsteczek, 249
 Verleta, 124
analiza równania Naviera-Stokesa, 169
analogi różnicowe operatora Laplace'a, 153
animacje, 344

B

bibliografia
 opis, 355
biblioteka OpenFrameworks, 163
bryła sztywna, 90

C

całkowanie, 13
 metodą prostokątów, 15
 Verleta, 124
CFD, Computational Fluid Dynamics, 165
ciała miękkie, 103, 107
ciecz nieściśliwa, 165
ciśnienie, 109, 171, 193, 225
 procedura iteracyjna, 208
cząsteczki w przepływie pełzającym, 279
cząstki znaczone, 185, 212

D

D2Q9, 223
D3Q15, 267
długość wektora, 50
dokładność metody różnicowej, 14
doświadczenie Younga, 161
dwuwektor, 53
dynamika układów punktów materialnych, 57
dyskretyzacja, 293
dywergencja, 208
działanie programu Schrödinger, 324

E

energia kinetyczna komórki, 288
ewolucja stanu układu kwantowego, 316

F

fala, 137
 jednowymiarowa, 138
 stojąca, 151, 163

figury Lissajous, 32, 34

flagowanie, 186

format

obiektów 3D, 115

PPM, 253

VTK, 244

formowanie się kropeł, 266

funkcja

falowa, 315

rozkładu, 222

struktura danych, 224

G

gaz

doskonały, 109

sieciowy LGA, 221

gęstość, 225, 302

GIMP, 254

Glyph2D, 247

I

iloczyn

skalarny, 49

wektorowy, 53

implementacja

LBM, 224, 232

format VTK, 244

inicjalizacja, 233

krok kolizji, 236

krok obliczeniowy, 234

prędkość i gęstość, 235

przepływ w kanale, 238

przepływ w kanale z przeszkodą, 240

stan równowagi, 236

śledzenie toru cząstek, 246

transport, 237

tunel aerodynamiczny, 253

warunki periodyczne, 237

LBMTau1, 305

pętli obliczeniowej prędkości, 211

równania Schrödingera, 319

siatki różnicowej Eulera, 184

warunków brzegowych cieczy, 199

impuls falowy, 149, 160

interferencja fal, 160

J

jednostki fizyczne, 291

K

klasa Wektor, 48

kody źródłowe, 329

kolizja, 58, 128, 130, 231, 297

punkt – nieruchoma sfera, 70, 71

punkt – ściana, 68, 78

sfera ruchoma – sfera nieruchoma, 74

wykrywanie, 68, 76

komórki

brzegowe, 199

narożne, 211

powierzchniowe, 197

konfiguracja początkowa cieczy, 203

konwekcja, 171

krętość, 284

krok czasowy symulacji, 132

kropla, 220, 266

kryterium zbieżności symulacji, 277

krzywa Gaussa unormowana, 319

L

LBM, The Lattice Boltzmann Method, 220, 221

czas relaksacji, 300

implementacja metody, 232

jednostki fizyczne, 291

model trójwymiarowy, 267

przepływ wielofazowy, 262

siła zewnętrzna, 229

transport, 301

warunki brzegowe, 228

lepkość

dynamiczna, 240

kinematyczna, 170, 240

LGA, Lattice Gas Automata, 221, 222

liczba

Reynoldsa, 255

π przepływu, 287

linie prądu, 246

lista jednokierunkowa, 60

M

macierz kolizji, 297
 metoda
 całkowania Verleta, 124
 cząstek znaczonych, 185
 gazu sieciowego Boltzmanna, 220
 iteracyjna Jacobiego, 318
 LBM-BGK, 240
 LBM-MRT, 296
 LBMTau1, 307
 MidPoint, 66
 punktu środkowego drugiego rzędu, 40
 raytracingu monte carlo, 128
 RKIV, 42
 różnicowa Eulera, 13, 14
 algoryt, 16
 dokładność rozwiązania, 18
 rozpad promieniotwórczy, 17
 ruch oscylatora harmonicznego, 33
 zapis wektorowy, 65
 Rungego-Kutty, 43
 Rungego-Kutty czwartego rzędu, 42
 skokowa, 19
 dokładność rozwiązania, 20, 23
 VOF, 312
 metryka, 53
 model
 ciał miękkich, 133
 D2Q5, 223
 D2Q9, 223
 dwuwymiarowego sznura, 86
 dwuwymiarowy, 223
 fizyczny ciał miękkich, 107
 LBMTau1, 301, 310
 liny, 102
 poruszającej się postaci, 93
 Shan Chen, 309
 trójwymiarowy, 267
 więzów, 99
 MRT, multirelaxation time, 296

N

nieoznaczoność Heisenberga, 316
 nieściśliwość cieczy, 188

O

obiekt 3D, 115
 objętość zamkniętej bryły, 110
 obliczanie
 ciśnienia, 208
 prędkości, 211
 obszar kolizji, 58
 oddziaływanie sprężyste, 83
 operator
 ewolucji czasowej, 317
 Laplace'a, 153
 nabla, 188
 ośrodek porowaty, 271, 276

P

paczka falowa
 przejście przez barierę potencjału, 324
 rozcięcie, 325
 rozpraszanie, 326
 ParaView, 274
 pola wektorowe, 167
 pole
 ciśnień, 194
 dywergencji, 208
 grawitacyjne, 64
 skalarne ciśnienia, 215
 wektorowe prędkości, 191, 211, 247
 połączenia sprężyste, 85, 88
 porowatość, 282
 powierzchnia
 cieczy, 197
 porów, 283
 PPM, portable pixmap, 253
 prawo
 Darcy'ego, 273
 Gaussa-Ostrogradskiego, 111
 Hooke'a, 83
 powszechnego ciążenia, 80
 prędkość, 190, 191, 211, 225, 302
 powierzchniowa, 274
 profil prędkości, 240, 243
 programy, 341
 przeflagowanie komórek, 205
 przeliczanie jednostek, 294

przepływ
 laminarny, 170
 pełzający, 273, 279
 Poiseuille'a, 239
 przez komorę, 297, 308
 przez ośrodki porowate, 271
 przez strukturę trójwymiarową, 274
 przez zamkniętą komorę, 300
 w kanale, 238
 w kanale z przeszkodą, 240
 wielofazowy, 262
 wokół przeszkody, 258, 260
 wokół sfery, 270
 z powierzchnią swobodną, 311
przepuszczalność, 275, 282
 układu losowego, 277, 286
przesunięcie cząstek znaczonych, 212
przeszkoda, 302
przybliżenie dyskretne, 175
punkt materialny, 57, 60
 przymocowany do sprężyny, 33
 połączenia sprężyste, 88
 równania ruchu, 64

R

rachunek
 całkowy, 13
 wektorowy, 47
realaksacja, 194
reprezentacja cieczy, 181
rozkład prędkości, 192, 210
 cieczy, 168
rozpad promieniotwórczy
 rozwiązanie równania, 17
 równanie, 16
równanie
 dla płytkiej wody, 174, 176
 falowe, 137
 algorytm, 141
 w dwóch wymiarach, 157
 w jednym wymiarze, 138
 w wielu wymiarach, 152
 Kozeny'ego-Carmana, 282
 na wychylenie powierzchni cieczy, 174
 Naviera-Stokesa, 165, 169, 180
 przybliżenie dyskretne, 189
 schematy różnicowe, 188

płytkiej wody, 172
Poissona na ciśnienie, 193, 195, 209
rozpadu promieniotwórczego, 16
różniczkowe
 cząstkowe drugiego rzędu, 316
 drugiego stopnia, 24
 metoda Eulera, 13
 metoda punktu środkowego
 drugiego rzędu, 40
 metoda Rungego-Kutty
 czwartego rzędu, 42
 metoda skokowa, 19
 pierwszego rzędu, 11, 139
 rozpad promieniotwórczy, 16, 43
 ruch oscylatora harmonicznego, 33
 zwyčajne, 11, 13
 ruchu punktu materialnego, 64, 67
 ruchu wahadła matematycznego, 26
 Schrödingera, 315
 stanu gazu doskonałego, 109
 transportu Boltzmanna, 226, 227
różnice skończone, 11
ruch
 oscylatora harmonicznego, 35
 punktu materialnego, 64
rzęd dokładności, 14

S

schemat
 kolizji, 130
 Laxa, 190
 rozwiązania różnicowego, 318
 różnicowy, 176, 219
 różnicowy Eulera, *Patrz* metoda
 różnicowa Eulera
sfera kolizji, 70
siatka różnicowa
 Eulera, 139, 153, 181
 dostęp do danych, 183
 implementacja, 184
 komórka elementarna, 182
 komórki brzegowe, 186
 komórki narożne, 211
 zespolona, 319
siła
 Coulomba, 80
 grawitacji, 34

siła

- przyciągająca, 80
- sprężystości, 34, 83–86
- zewnętrzna, 229, 240

siły w płynie, 263

skalar, 52

Soda Constructor, 96, 98

stan początkowy układu, 319

strumień objętości, 274

symulacja

- ciała miękkiego, 113, 116, 128
- cieczy nieściśliwej, 201
- fal dwuwymiarowych, 162
- fali jednowymiarowej, 141
- flagi, 103–106
- kropli, 217
- metody LBM, 232
- odbicia kuli, 89
- opływania, 241, 255
- powierzchni cieczy nieściśliwej, 177
- przepływu, 256
 - wielofazowego, 265
 - wokoło sfery, 270
- równania falowego, 157
- ruchu wahadła, 29
- trójwymiarowych tkanin, 89

szereg Taylora, 15

Ś

ściany naczynia, 216

ścieżka wirowa von Karmana, 309

śledzenie toru cząstek, 246

T

tor cząstek, 246

tunel aerodynamiczny, 253

U

układ równań sprzężonych, 140

V

VOF, volume of fluids, 312

VTK, Visualization Toolkit, 244

W

wahadło

- fizyczne, 93
- matematyczne, 24
 - dynamika układu, 87
 - figury Lissajous, 32
 - równanie ruchu, 26, 27
 - symulacja ruchu, 28
 - wizualizacja, 31

warunek

- Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego, 205
- nieściśliwości cieczy, 166, 188
- zachowania masy, 173

warunki brzegowe, 197

Waves, 163

wektor, 52

- normalny, 52, 72
- prędkości cieczy, 168
- stanu układu kwantowego, 315

wektory

- długość, 50
- iloczyn skalarny, 49
- iloczyn wektorowy, 53
- normowanie, 52
- różnica, 51
- suma, 51

więzy odległości, 99

wizualizacja

- poła skalarnego ciśnienia, 215, 218
- przepływu płynu, 252
- śladu cząstek, 251
- wektorów poła prędkości, 244

współczynnik

- oporu, 259
- przepuszczalności, 275
- tłumienia, 73

współczynniki lepkości cieczy, 170

wyrównanie poziomów cieczy, 218

wyznaczanie liczby Reynoldsa, 295

Z

zasady dynamiki Newtona, 56

zmiennne bezwymiarowe, 292

PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA
Helion

Symulacje komputerowe — od podstaw!

- Poznaj metody numeryczne
- Naucz się stosować je w praktyce
- Odkryj świat symulacji komputerowych

Ostatnie kilkadziesiąt lat to okres burzliwego rozwoju technologii informatycznych i ciągłego zwiększania możliwości komputerów dostępnych dla coraz to szerszych rzesz użytkowników. Z zaawansowanych narzędzi graficznych i symulacyjnych mogą obecnie korzystać już nie tylko profesjonaliści zatrudnieni w dużych korporacjach dysponujących ogromnymi zasobami finansowymi, ale również pasjonaci, programiści i graficy pracujący dla niewielkich firm, które tworzą animacje komputerowe na użytek przemysłu czy branży rozrywkowej.

Realistyczne, uniwersalne i interaktywne efekty można tu uzyskać tylko w jeden sposób: wykorzystując fizyczne metody symulacji ruchu, do tego zaś niezbędna jest odpowiednia wiedza. Drugie wydanie książki *Symulacje komputerowe w fizyce* wprowadzi Cię w podstawy metod numerycznych oraz przedstawi ich zastosowanie w praktyce. Dowiesz się, jak przeprowadzać symulacje prostych i bardziej złożonych zjawisk fizycznych, rozwiązywać równanie falowe oraz symulować zachowanie cieczy nieściśliwych i gazów, a nawet wkroczysz w tajemniczy świat fizyki kwantowej. Symulacja flagi trzepoczącej na wietrze, miękkiej piłki odbijającej się od powierzchni czy oporu, który powietrze stawia jadącemu samochodowi? Przekonasz się, że to nic trudnego!

Książka jest przeznaczona zarówno dla studentów, jak i uczniów starszych klas szkół średnich, dla których może stanowić wstęp do praktycznego programowania symulacji i modelowania fizycznego w animacji komputerowej. Pozycja szczególnie zainteresuje studentów oraz kadrę dydaktyczną kierunków ścisłych, na przykład wykładowców modelowania komputerowego czy fizyki komputerowej, dla których może być punktem wyjścia do dalszego zgłębiania przedstawionych modeli. Do publikacji dołączony jest zbiór napisanych w językach C++, OpenGL oraz HTML5 programów, które ilustrują sposób przeprowadzania opisanych symulacji.

- Symulacje zjawisk mechaniki klasycznej
- Dynamika ciał miękkich w czasie rzeczywistym
- Rozwiązanie numeryczne równania falowego
- Symulacje dynamiki płynów (CFD)
- Rozwiązanie numeryczne równania Schrödingera

Poznaj metody numeryczne od podszewki!

	<i>Sprawdź nasze szkolenia!</i>	KOD KORZYŚCI <i>Sięgnij po więcej!</i>  
 helion.pl	 AKADEMIA IT & BUSINESS HELIONSZKOLENIA.PL	
 HELION SA ul. Kościuszki 1c 44-100 Gliwice tel.: 32 230 98 63 helion@helion.pl	ISBN 978-83-283-5496-8  9 788328 354968	
INFORMATYKA W NAJLEPSZYM WYDANIU		Cena: 79,00 zł