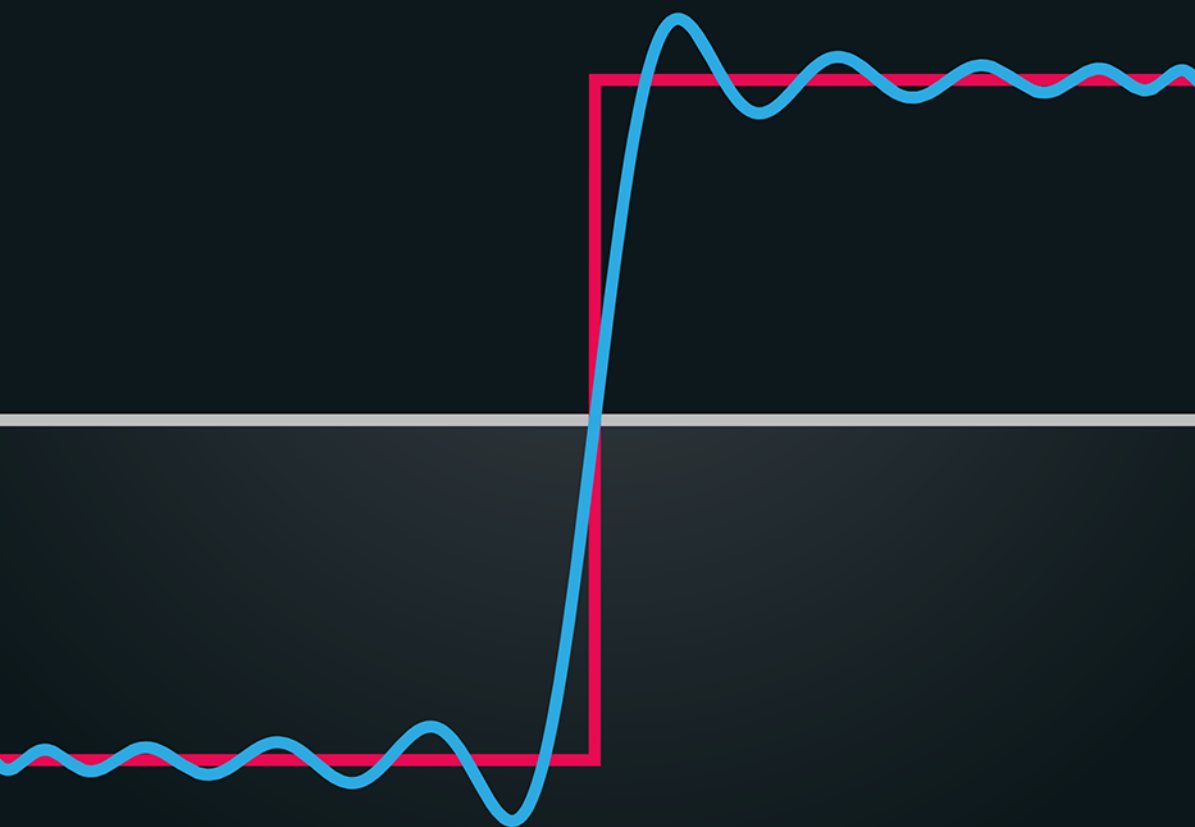


Wojciech Kordecki
Karol Selwat

METODY NUMERYCZNE DLA INFORMATYKÓW



Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Helion SA dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Helion SA nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Projekt okładki: Studio Gravite / Olsztyn

Obarek, Pokoński, Pazdrijowski, Zaprucki

Skład komputerowy w systemie **L^AT_EX** wykonali autorzy.

Grafika na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.com

Helion SA

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: helion@helion.pl

WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://helion.pl/user/opinie/menuin>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Kody źródłowe wybranych przykładów dostępne są pod adresem:

<ftp://ftp.helion.pl/przyklady/menuin.zip>

ISBN: 978-83-283-6523-0

Copyright © Helion 2020

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

Spis treści

Oznaczenia	1
Wstęp	3
1. Dokładność	7
1.1. Błędy obliczeń	7
1.2. Typy całkowite i zmiennopozycyjne	9
1.3. Stabilność i niestabilność numeryczna	16
1.4. Zadania	18
2. Układy równań liniowych	21
2.1. Właściwości wyznaczników	21
2.2. Rozkłady macierzy	24
2.3. Układy równań liniowych	30
2.4. Metoda eliminacji Gaussa	33
2.5. Zadania	36
3. Równania nieliniowe	39
3.1. Metoda bisekcji	39
3.2. Metoda Newtona	40
3.3. Metoda siecznych	42
3.4. Zadania	43
4. Interpolacja	45
4.1. Interpolacja wielomianowa	46
4.2. Funkcje sklejane	49

4.3.	Krzywe Béziera	51
4.4.	Zadania	54
5.	Aproksymacja	57
5.1.	Zagadnienia aproksymacji	57
5.2.	Szeregi potęgowe i trygonometryczne	62
5.3.	Aproksymacja jednostajna	66
5.4.	Aproksymacja średniokwadratowa	67
5.5.	Zadania	71
6.	Całkowanie i różniczkowanie	73
6.1.	Całkowanie	73
6.2.	Różniczkowanie	80
6.3.	Zadania	86
7.	Optymalizacja	87
7.1.	Zagadnienia	87
7.2.	Funkcje jednej zmiennej	89
7.3.	Funkcje wielu zmiennych	95
7.4.	Zadania	103
Odpowiedzi do zadań		105
Wykład 1		105
Wykład 2		106
Wykład 3		107
Wykład 4		108
Wykład 5		110
Wykład 6		110
Wykład 7		111
Literatura		115
Skorowidz		117

5. Aproksymacja

5.1. Zagadnienia aproksymacji

Zacznijmy od znanego problemu digitalizacji, czyli przetwarzania sygnału analogowego (ciągłego) do postaci cyfrowej. W przedziale $[a, b]$ określona jest funkcja ciągła $f(t)$, $t \in [a, b]$. Niech t_i będzie ciągiem skończonym takim, że $t_0 = a$, $t_n = b$ oraz

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b - a}{n}.$$

Określamy funkcję schodkową $f_d(t)$ wzorem

$$f_d(t) = f(t_i)$$

dla $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Jest to zamiana postaci analogowej sygnału na cyfrową. Funkcja schodkowa $f_d(t)$ jest aproksymacją, czyli przybliżeniem funkcji ciągłej $f(t)$. Będziemy się jednak zajmować trudniejszym zagadnieniem, w pewnym sensie odwrotnym: mając dany ciąg t_i , będziemy szukać ciągłej funkcji aproksymującej $f(t)$.

Postawmy następujący problem. Mając dane punkty

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

szukamy funkcji $f(x)$ danej klasy takiej, aby w punktach $x_1, x_2, \dots, x_n$ jej wartości $f(x_i)$ najlepiej przybliżały wartości y_i .

Podobne zagadnienie można sformułować dla funkcji. Dana jest funkcja $g(x)$, którą chcemy dobrze przybliżyć funkcją $f(x)$ danej klasy.

Potrzebna jest więc miara jakości przybliżenia, czyli odległości między zbiorem

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

a zbiorem

$$\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$$

lub też między funkcją $g(x)$ a przybliżającą ją funkcją $f(x)$.

W tym celu zdefiniujemy miarę odległości ρ w zbiorze X , zwaną metryką. Przestrzenią metryczną jest para (X, ρ) , gdzie X jest zbiorem, a metryka ρ jest funkcją określoną na $X \times X$

$$\rho: (x, y) \rightarrow [0, \infty),$$

spełniającą warunki:

- (1) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Warunek (3) nosi nazwę warunku trójkąta. Wartość metryki $\rho(x, y)$ to odległość między punktami x i y .

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych, określonych na odcinku $K = [a, b]$, lub funkcji określonych na zbiorze $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Normą funkcji jest odwzorowanie

$$\|\cdot\|: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty),$$

które funkcji $f \in \mathcal{F}$ przypisuje nieujemną liczbę $\|f\|$ i które spełnia warunki:

- (1) $\|f\| = 0 \iff f \equiv 0$,
- (2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$,
- (3) $\|f\| + \|g\| \geq \|f + g\|$.

Warunek (3) nosi nazwę warunku trójkąta.

Norma określa metrykę w rodzinie funkcji. Jeśli $\mathcal{F}$ jest rodziną funkcji określonych na zbiorze K , to wzór

$$\rho_{\|\cdot\|}(f, g) = \|f - g\|$$

określa metrykę w tej rodzinie. Para $(\mathcal{F}, \rho_{\|\cdot\|})$ jest przestrzenią metryczną.

Normę dla danej rodziny $\mathcal{F}$ można określać na różne sposoby.

Norma jednostajna

Jako pierwszą określimy normę jednostajną wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad (5.1)$$

gdzie supremum $\sup$ oznacza wartość największą w zbiorze. Jest to norma, gdyż w oczywisty sposób spełnione są warunki (1) – (2).

Sprawdzenia wymaga tylko warunek (3). Jest on spełniony, bo dla $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a| + |b| \geq |a + b|.$$

Przykład 5.1.

Na odcinku $K = [-5, 5]$ określone są funkcje

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{10x^2 + 1},$$

$$g(x) = \frac{x}{10}.$$

Szukamy maksimum ich różnicy

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{9x}{100x^2 + 10}. \quad (5.2)$$

Pochodna funkcji $h(x)$:

$$h'(x) = \frac{-9(10x^2 - 1)}{10(10x^2 + 1)^2}$$

dla $x > 0$ zeruje się w punkcie $x_0 = \sqrt{1/10} \approx 0.3162277660168379$ i w tym punkcie funkcja h osiąga swoje maksimum

$$\|f - g\| = h(x_0) = \frac{9}{2 \cdot 10^{3/2}} \approx 0.142302494707577.$$

Na rys. 5.1 podane są wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$, a na rys. 5.2 wykres ich różnicy $h(x)$.

Norma L_2

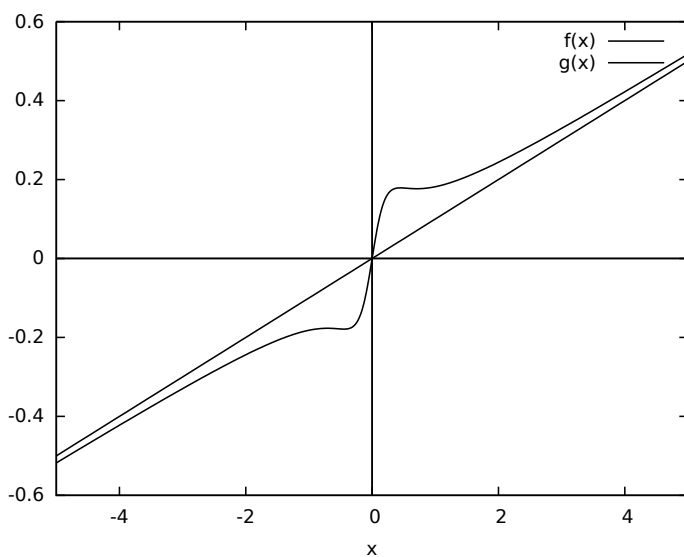
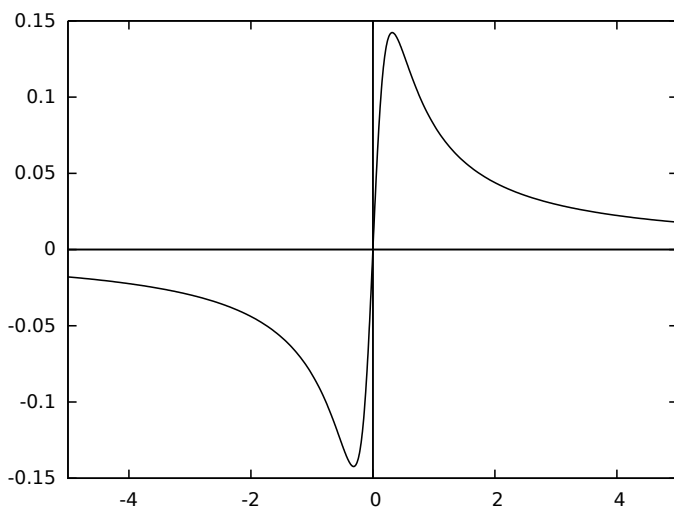
Jako następną określimy normę L_2 , zwaną normą L-kwadrat. Niech $f \in \mathcal{F}$. Norma L_2 jest określona wzorem

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x) dx, \quad (5.3)$$

czyli

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Ogólniej możemy przyjąć $a = -\infty$ i $b = \infty$, pod warunkiem że całka niewłaściwa jest zbieżna.

Rysunek 5.1. Wykresy $f(x)$ i $g(x)$ z przykładu 5.1Rysunek 5.2. Wykres $h(x)$ z przykładu 5.1**Przykład 5.2.**

Na odcinku $K = [-5, 5]$ dane są funkcje

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{10x^2 + 1},$$

$$g(x) = \frac{x}{10}.$$

Szukamy normy L_2 ich różnicy

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{9x}{100x^2 + 10}. \quad (5.4)$$

$$\int_0^5 h^2(x) dx = \frac{20331\sqrt{10} \arctg(5\sqrt{10}) - 4050}{5020000}$$

$$\approx 0.01850184574525332,$$

czyli norma L_2 funkcji h jest równa

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sqrt{\int_{-5}^5 h^2(x) dx} \\ &= \sqrt{\frac{20331\sqrt{10} \arctg(5\sqrt{10}) - 4050}{100\sqrt{251}}} \\ &\approx 0.1923634359500439. \end{aligned}$$

Norma L_1

Podobnie definiuje się normę L_1 . Niech $f \in \mathcal{F}$. Norma L_1 jest określona wzorem

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (5.5)$$

Ogólniej możemy przyjąć $a = -\infty$ i $b = \infty$, pod warunkiem że całka niewłaściwa jest zbieżna.

Przykład 5.3.

Dla funkcji $h(x)$ określonej wzorem (5.4) mamy

$$\int_0^5 h(x) dx = \frac{9 \ln 210}{200} \approx 0.2486453822609302,$$

czyli norma L_1 funkcji h jest równa

$$\|h\| = \int_{-5}^5 |h(x)| dx \approx 0.4972907645218605.$$

Normy na ciągach

Normy definiujemy również dla funkcji określonych na zbiorach skończonych lub ciągach. Niech $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ lub $K = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, $a_i = f(x_i)$. Wtedy norma jednostajna jest określona wzorem

$$\|f\| = \sup \{|a_1|, |a_2|, \dots\}. \quad (5.6)$$

Norma L_2 :

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}. \quad (5.7)$$

Norma L_1 :

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|. \quad (5.8)$$

5.2. Szeregi potęgowe i trygonometryczne

Szeregi potęgowe

Szereg potęgowy dla ustalonego x_0 ma postać

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad (5.9)$$

dla $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, gdzie r jest promieniem zbieżności szeregu. Dla $x \notin [x_0 - r, x_0 + r]$ szereg jest rozbieżny, więc nie definiuje funkcji f . Dla $x = x_0 - r$ lub $x = x_0 + r$ szereg może być zbieżny lub rozbieżny.

Szereg taki można zapisać w postaci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k + \theta_n, \quad (5.10)$$

gdzie θ_n jest resztą szeregu.

Jeśli

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k + \theta_n$$

oraz $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, to

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k. \quad (5.11)$$

Jest to wzór Taylora¹. W szczególnym przypadku $x_0 = 0$ mówimy o wzorze Maclaurina²:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k. \quad (5.12)$$

Dalsze szczegóły i przykłady zastosowania wzorów Taylora i Maclaurina można znaleźć np. w [9] na str. 99 – 104.

Przykład 5.4.

Rozważmy przybliżenie funkcji $\sin x$ wzorem Maclaurina:

$$\begin{aligned} \sin x &\approx \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Kolejne przybliżenia funkcji $\sin x$ wzorem (5.13) pokazane są na rys. 5.3.

Szeregi Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa³ określa się rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_k(x) &= 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

W przedziale $[-1, 1]$ wielomiany Czebyszewa wyrażają się wzorem

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$$

dla $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

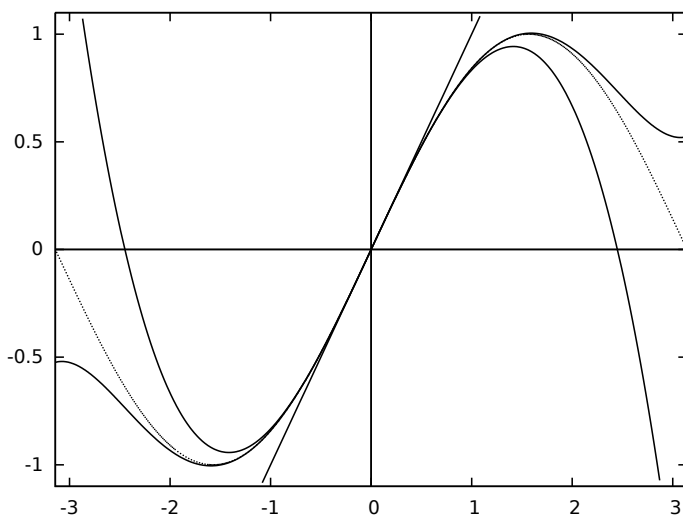
Aproksymacja szeregami Czebyszewa polega na przybliżaniu funkcji $f(x)$ sumami wielomianów Czebyszewa $T_k(x)$:

$$f(x) \approx \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k T_k(x),$$

¹Brook Taylor (1685 – 1731) – matematyk angielski. Odkrywcą pojęcia zwanego dziś szeregiem Taylora.

²Colin Maclaurin (1698 – 1746) – matematyk szkocki. Jego prace dotyczyły geometrii, analizy matematycznej i mechaniki. Zajmował się zbieżnością szeregów i teorią potencjału.

³Pafnutij Lwowicz Czebyszew, Pafnuty Lvovich Chebyshev, Пафнутий Львович Чебышёв (1821 – 1894) – matematyk rosyjski. Dokonał wielkich odkryć w dziedzinie teorii liczb, teorii prawdopodobieństwa, w analizie matematycznej oraz w zastosowaniach matematyki.



Rysunek 5.3. Kolejne kroki w aproksymacji potęgowej

<https://static01.helion.com.pl/helion/pliki/menuin/Power.gif>



gdzie

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Przykład 5.5.

Rozważmy funkcję $\text{sgn}(x)$, czyli znak:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

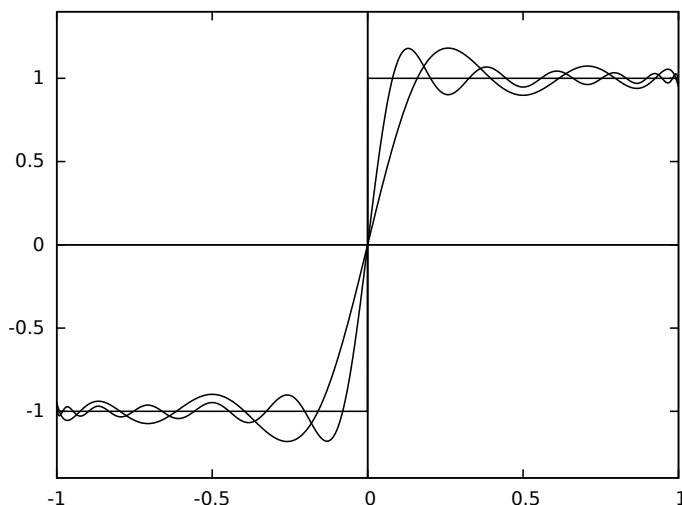
Funkcję $\text{sgn}(x)$ ograniczamy do dziedziny $(-1, 1)$ i w wyniku dostajemy

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, 1), \\ -1 & \text{dla } x \in (-1, 0), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Można obliczyć (pominiemy to zagadnienie), że

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 2i, \\ (-1)^{2k+1} \frac{4}{k\pi} & \text{dla } k = 2i + 1, \end{cases}$$

$k = 0, 1, \dots$. Wykres funkcji $f(x)$ danej wzorem (5.15) i kolejne aproksymacje dla $n = 12$ są przedstawione na rys. 5.4.



Rysunek 5.4. Kolejne kroki w aproksymacji Czebyszewa

<https://static01.helion.com.pl/helion/pliki/menuin/Czebyszew.gif>



Szeregi trygonometryczne

Funkcje okresowe wygodnie jest przybliżać szeregami trygonometrycznymi Fouriera⁴. Szereg trygonometryczny ma postać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (5.16)$$

dla $x \in [-\pi, \pi]$, o ile szereg jest zbieżny. Funkcja $f(x)$ określona wzorem (5.16) jest okresowa o okresie 2π . Biorąc tylko początkowe wyrazy sumy (5.16), otrzymujemy przybliżenie funkcji $f(x)$.

⁴Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) – francuski matematyk i fizyk. Twórca teorii szeregów Fouriera i transformacji Fouriera.

Przykład 5.6.

Funkcję $\operatorname{sgn}(x)$ daną wzorem (5.14) ograniczamy do dziedziny $(-\pi, \pi)$ i w wyniku dostajemy

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ -1 & \text{dla } x \in (-\pi, 0), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

Można obliczyć (pominiemy to zagadnienie), że $a_k = 0$ oraz

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 2i, \\ \frac{4}{k\pi} & \text{dla } k = 2i + 1, \end{cases}$$

gdzie $k = 0, 1, \dots$. Wtedy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin((2k+1)x).$$

Oznaczając

$$s(k, x) = b_k \sin(kx),$$

otrzymujemy

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n s(2k+1, x). \quad (5.18)$$

Wykres funkcji $f(x)$ danej wzorem (5.17) i kolejne aproksymacje dane wzorem (5.18) dla $n = 12$ są przedstawione na rys. 5.5.

5.3. Aproksymacja jednostajna

Celem aproksymacji jednostajnej jest minimalizacja największego błędu. Jednakże nie zawsze jest to dobre kryterium.

Przykład 5.7.

Aproksymując funkcję $f(x)$ daną wzorem (5.17) funkcją

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{2k+1} \sin((2k+1)x) \quad (5.19)$$

na podstawie wzoru (5.18), zawsze mamy

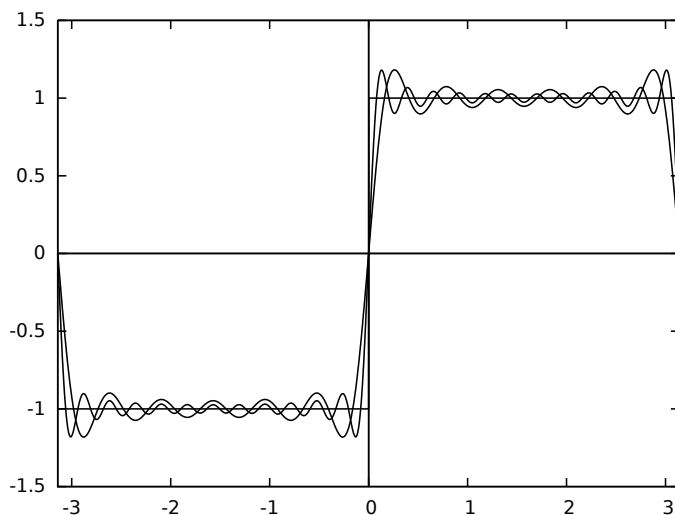
$$\sup_{x \in (-\pi, \pi)} (F_n(x) - f(x)) = 1.$$

Czyli dla dowolnego n norma jednostajna $\|F_n - f\|$ wynosi 1.

Przykład 5.8.

Przybliżenie funkcji $\sin x$ funkcją

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad (5.20)$$



Rysunek 5.5. Kolejne kroki w aproksymacji trygonometrycznej

<https://static01.helion.com.pl/helion/pliki/menuin/Fourrier.gif>



na podstawie wzoru (5.13) jest jednostajne, tzn. dla normy jednostajnej mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - f\| = 0.$$

5.4. Aproksymacja średniokwadratowa

Aproksymacja średniokwadratowa polega na przybliżaniu danej funkcji f z użyciem normy L_2 .

Przykład 5.9.

Stosując normę L_2 dla przybliżenia funkcji $f(x)$ z (5.17) funkcją $F_n(x)$ daną wzorem (5.19), otrzymujemy aproksymację średniokwadratową

$$\|F_n - f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (F_n(x) - f(x))^2 dx.$$

Wartości kwadratów błędów aproksymacji $d_n^2 = \|F_n - f\|^2$ podane są w tabeli 5.1.

Omówimy teraz zagadnienie aproksymacji średniokwadratowej ogólnie. Dla danego zbioru punktów (x_i, y_i) , gdzie $y_i = f(x_i)$, szukamy

Tabela 5.1. Kwadraty błędów aproksymacji funkcją (5.19)

n	d_n^2
1	1.1902
2	0.6243
3	0.4206
4	0.3167
5	0.2538
6	0.2117
7	0.1816
8	0.1589

funkcji $F(x)$ takiej, że dla pewnej funkcji wagowej $w(x)$ wyrażenie

$$\|F - f\|^2 = \sum_{i=1}^n w(x_i) (F(x_i) - y_i)^2$$

osiąga minimum. W dalszym ciągu będziemy rozważać przypadek najprostszy z $w(x) \equiv 1$.

W aproksymacji liniowej szukamy funkcji aproksymującej w postaci $F(x) = ax + b$, czyli szukamy takich a i b , aby funkcja $h(a, b)$

$$h(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

osiągnęła minimum.

Najpierw obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial}{\partial a} h(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) x_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial b} h(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b).$$

Następnie szukamy miejsc zerowych pochodnych, czyli rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \end{cases}.$$

Stąd

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \end{cases}.$$

Oznaczmy:

$$A = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad B = \sum_{i=1}^n x_i, \quad C = \sum_{i=1}^n y_i, \quad D = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (5.21)$$

Otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a = (A - bB) / D \\ b = (C - aB) / n \end{cases}.$$

Stąd dostajemy

$$a = \frac{nA - BC}{nD - B^2}, \quad b = \frac{CD - AB}{nD - B^2}. \quad (5.22)$$

Przykład 5.10.

Dla danych z tabeli 5.2 otrzymujemy ze wzorów (5.21) i (5.22)

$$a = 0.9868421052631559, \quad b = 0.9776315789473676.$$

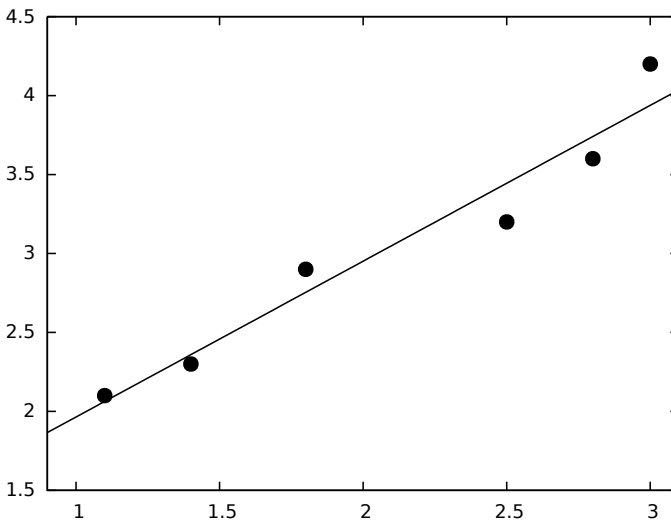
Tabela 5.2. Dane do przykładu 5.10

x_i	1.1	1.4	1.8	2.5	2.8	3.0
y_i	2.1	2.3	2.9	3.2	3.6	4.2

Punkty i prosta aproksymująca pokazane są na rys. 5.6.

Teraz zajmiemy się aproksymacją wielomianową. Niech funkcja aproksymująca będzie postaci

$$F(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_m \varphi_m(x).$$



Rysunek 5.6. Aproksymacja prostą z przykładu 5.10

Zakładamy dalej (szczególny przypadek), że

$$\varphi_k(x) = x^k,$$

czyli aproksymujemy $f(x)$ wielomianem stopnia m .

Minimalizujemy funkcję

$$h(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^m a_j x_i^j - y_i \right)^2.$$

Dla $i = 0, 1, \dots, m$ mamy układ $m+1$ równań z $m+1$ niewiadomymi:

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial a_i} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^m a_j x_i^j - y_i \right) x_i^i = 0. \right. \quad (5.23)$$

Znajdując niewiadome $a_0, a_1, \dots, a_m$, znajdziemy współczynniki wielomianu aproksymującego.

Przykład 5.11.

Dla danych z tabeli 5.3 znajdziemy wielomian aproksymujący drugiego stopnia.

Szukamy wielomianu aproksymującego w postaci $F(x) = ax^2 + bx + c$. Układ (5.23) jest w tym przypadku układem trzech równań z trzema niewia-

Tabela 5.3. Dane do przykładu 5.11

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	2	2.48	2.84	3.00	2.91

domymi a, b, c :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}.$$

Po podstawieniu danych z tabeli 5.3 otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} 22.125a + 12.5b + 7.5c = 21.85 \\ 12.5a + 7.5b + 5c = 14.4 \\ 7.5a + 5b + 5c = 13.23 \end{cases}.$$

Rozwiązanie tego układu znajdujemy np. metodą eliminacji Gaussa (patrz punkt 2.4). Dokładnym rozwiązaniem jest trójka

$$a = -\frac{67}{175}, \quad b = \frac{2159}{1750}, \quad c = \frac{6953}{3500}.$$

Ostatecznie zatem wielomian aproksymujący to

$$F(x) = -\frac{67}{175}x^2 + \frac{2159}{1750}x + \frac{6953}{3500}.$$

Punkty i krzywa aproksymująca przedstawione są na rys. 5.7.

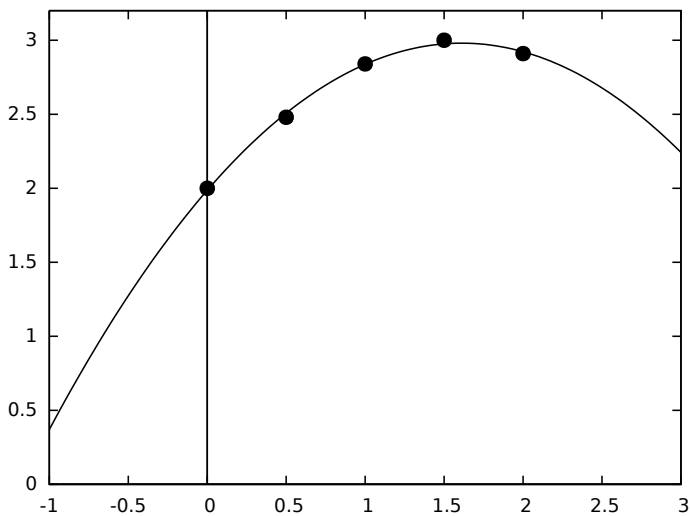
5.5. Zadania

5.1. Metodą liniowej aproksymacji średniokwadratowej wyznacz prostą aproksymującą funkcję daną w postaci dyskretnej w poniższej tabeli:

x	1	2	3	4	5
y	0.85	2.0	2.95	4.2	5.4

5.2. Wyznacz prostą aproksymującą dla danych punktów:

x	0	0.35	0.7	1.05	1.4
y	1	1.34	1.64	1.87	1.99



Rysunek 5.7. Aproksymacja parabolą z przykładu 5.11

5.3. Wyznacz krzywą aproksymującą drugiego stopnia dla danych punktów:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	0	-0.12	-0.46	-0.92	-1.42
x	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5
y	-1.80	-1.99	-1.94	-1.65	-1.21

5.4. Wyznacz krzywą stopnia trzeciego, aproksymującą funkcję daną w postaci dyskretnej, przedstawioną w poniższej tabeli:

x	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
y	2.43	2.36	2.35	2.38	2.37	2.373	2.39	2.51	2.6	2.65

Skorowidz

A

algorytm numerycznie stabilny, 16
aproksymacja, 57
 jednostajna, 66
 liniowa, 68
 średniokwadratowa, 67

B

błąd
 bezwzględny, 7
 względny, 7

C

całka Riemanna, 75
cecha, 11

D

digitalizacja, 57

E

ekstremum, 87

F

funkcja schodkowa, 57
funkcje
 sklejane, 49
 stopnia trzeciego, 50
 unimodalne, 90

G

gradient, 95

H

hesjan, 95

I

iloraz różnicowy, 42, 47, 80
interpolacja, 45
 łamana, 46, 82
 wielomianem, 47

J

język
 C++, 11
 Object Pascal, 10
 Python, 10

K

kod uzupełnieniowy, 9
krzywe Béziera, 51
 drugiego stopnia, 51
 sklejane, 53
 trzeciego stopnia, 52
kula otwarta, 87

L

liczba e , 8, 12

Ł

łamana, 46

M

macierz
 jednostkowa, 31
 odwracalna, 30
 odwrotna, 30
 określona
 dodatnio, 28
 nieujemnie, 28, 101
przekątniowa, 24

- rozszerzona układu, 34
- trójkąta, 24
- maksimum
 - globalne, 87
 - lokalne, 87
- mantysa, 11
- metoda
 - bisekcji, 39
 - całkowania Riemanna, 75
 - Doolittle'a, 25
 - eliminacji Gaussa, 33, 35
 - Gaussa, 26
 - gradientu prostego, 98
 - największego spadku, 98
 - Newtona, 40
 - prostokątów, 75
 - siecznych, 42
 - Simpsona, 78
 - trapezów, 77

metryka, 58

minimum

- globalne, 87
- lokalne, 87

N

norma, 58

- jednostajna, 58

- L_1 , 61

- L_2 , 59

O

otoczenie punktu, 87

P

pochodna cząstkowa, 95

program

- Maxima, 4

- Scilab, 4

promień zbieżności, 62

przestrzeń metryczna, 58

R

reguła fałsi, 42

reszta szeregu, 62

rozkład

- Cholesky'ego, 29

- LU , 24

S

szereg

- Czebyszewa, 63

- potęgowy, 62, 74

- trygonometryczny, 65

T

typ

- całkowity

- bez znaku, 10, 11

- ze znakiem, 10, 11

- zmiennopozycyjny, 10, 11

U

układ równań liniowych, 30

W

warstwica, 95

warunek trójkąta, 58

węzeł, 47

węzły interpolacji, 45

wielomian

- Czebyszewa, 63

- Lagrange'a, 49

wykładnik, 11

wyznacznik, 21

- iloczynu, 23

wzór

- Cramera, 32

- Maclaurina, 63

- Taylora, 63, 96

wzór interpolacyjny

- Lagrange'a, 49, 84

- Newtona, 47

Z

złoty podział, 91

PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA
Helion

Odkryj narzędzia informatyczne do rozwiązywania problemów matematycznych

- Poznaj metody numeryczne
- Zrozum ich działanie
- Wykorzystaj je w praktyce

Metody numeryczne znajdują zastosowanie wszędzie tam, gdzie nie da się wyznaczyć odpowiedniego rozwiązania metodami analitycznymi lub gdy jest to zbyt uciążliwe. Całkowanie i różniczkowanie, rozwiązywanie układów równań liniowych, szukanie rozwiązań równań nieliniowych, interpolacja i aproksymacja, szukanie minimów i maksimów — wszystkie te działania można przeprowadzić za pomocą komputera właśnie dzięki wykorzystaniu metod numerycznych.

Na rynku brakowało dotąd opracowania, które w analityczny i zwięzły sposób prezentowałoby najważniejsze zagadnienia związane z praktycznym zastosowaniem metod numerycznych w informatyce. Ten podręcznik wypełnia tę lukę — stanowi kompaktowe źródło podstawowej wiedzy dla studentów kierunków informatycznych, niezbędnej zwłaszcza dla przyszłych programistów. Dzięki lekturze mogą poznać teoretyczne podstawy metod numerycznych, zrozumieć je na przedstawionych przykładach oraz ugruntować tę wiedzę poprzez praktyczne zadania.

- Typy liczbowe, błędy i dokładność obliczeń
- Rozwiązywanie układów równań liniowych
- Rozwiązywanie równań nieliniowych
- Interpolacja i aproksymacja numeryczna
- Całkowanie i różniczkowanie numeryczne
- Optymalizowanie funkcji jednej i wielu zmiennych

Metody numeryczne — klucz do świata obliczeń komputerowych

	<i>Sprawdź nasze szkolenia!</i>	KOD KORZYŚCI <i>Sięgnij po więcej!</i> 	
 helion.pl	 AKADEMIA IT & BUSINESS HELIONSZKOLENIA.PL	ISBN 978-83-283-6523-0  9 788328 365230	
INFORMATYKA W NAJLEPSZYM WYDANIU		Cena: 37,00 zł	