

Roman **Leitner**
Janusz **Zacharski**

**Zarys
matematyki
wyższej
dla studentów**

część 3

Wydawnictwo WNT



Zarys matematyki wyższej dla studentów

[Kup książkę](#)

Roman **Leitner**
Janusz **Zacharski**

**Zarys
matematyki
wyższej
dla studentów**

część 3

Wydawnictwo WNT



[Kup książkę](#)

Opiniodawcy:
Bolesław Palczewski
Andrzej Pacut

Redaktor wyd. IX: *Lilianna Szymańska*
Okładkę i strony tytułowe projektował: *Przemysław Spiechowski*
Redaktor techniczny: *Grażyna Miazek*

Wydawca: *Karol Zawadzki*

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo
Więcej na www.legalnakultura.pl
Polska Izba Książki

Copyright © by Wydawnictwo WNT
Warszawa 1994, 1995, 1998
Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2017

ISBN 978-83-01-18823-8 - całość
ISBN 978-83-01-19382-9 – część 3

Wydanie IX – 1 dodruk (PWN)
Warszawa 2017

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

Kup książkę

Spis treści

Przedmowa	7
Rozdział 27. Równania różniczkowe zwyczajne (metody ogólne)	9
§ 167. Metoda łamanych Eulera	9
§ 168. Metoda kolejnych przybliżeń (Picarda)	12
§ 169. Metoda szeregów potęgowych (Cauchy'ego)	19
§ 170. Równanie Bessela	23
§ 171. Układy równań różniczkowych	29
§ 172. Układy równań różniczkowych liniowych	38
Rozdział 28. Równania różniczkowe cząstkowe fizyki matematycznej	44
§ 173. Równanie struny	44
§ 174. Równanie błony	54
§ 175. Równanie fali	61
§ 176. Równanie przewodnictwa ciepła	68
§ 177. Równanie Laplace'a. Potencjały newtonowskie i logarytmiczne	71
Rozdział 29. Przekształcenie Fouriera	98
§ 178. Wzór całkowy Fouriera i przekształcenia Fouriera	98
§ 179. Własności przekształcenia Fouriera. Zastosowania	105
§ 180. Wzór, całkowy Fouriera rzeczywisty. Cosinusowe i sinusowe przekształcenia Fouriera	110
Rozdział 30. Macierze i wyznaczniki (rozszerzenie teorii)	113
§ 181. Działania na macierzach	113
§ 182. Zastosowania macierzy	120
§ 183. Wyznaczniki (rozszerzenie wiadomości)	129

§ 184. Wektory w przestrzeni n -wymiarowej	136
§ 185. Wartości własne i wektory własne macierzy kwadratowej	143

<i>Rozdział</i> 31. Rachunek prawdopodobieństwa	160
--	-----

§ 186. Przestrzeń probabilistyczna	160
§ 187. Prawdopodobieństwo warunkowe. Zdarzenia niezależne	171
§ 188. Zmienne losowe jednowymiarowe	182
§ 189. Funkcje zmiennych losowych	201
§ 190. Zmienne losowe dwuwymiarowe	206
§ 191. Rozkłady brzegowe i warunkowe. Zmienne losowe niezależne	217
§ 192. Funkcje zmiennych losowych dwuwymiarowych	234
§ 193. Parametry rozkładu zmiennych losowych	239
§ 194. Funkcje charakterystyczne	254
§ 195. Podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa	260
§ 196. Twierdzenia graniczne	273

<i>Rozdział</i> 32. Statystyka matematyczna	289
--	-----

§ 197. Statystyki z próby. Rozkłady statystyk	289
§ 198. Estymacja punktowa	295
§ 199. Przedziały ufności	303
§ 200. Weryfikacja hipotez	310
§ 201. Test zgodności chi kwadrat	322

Tablice	327
Skorowidz nazwisk	336
Skorowidz rzeczowy	337

Przedmowa

Książka niniejsza jest trzecią częścią zmienionego trzyczęściowego „Zarysu matematyki wyższej dla inżynierów”. Część pierwsza tego zmienionego wydania ukazała się w 1977 i 1981 r., a obecnie część druga i trzecia. Wydanie to różni się od poprzednich, zawiera wiele nowych rozdziałów, a wśród nich rachunek prawdopodobieństwa i statystykę matematyczną, które napisał magister Janusz Zacharski. Obecnie na całość „Zarysu” składają się:

- część I (logika, równania liniowe, geometria analityczna, ciągi i szeregi liczbowe, rachunek różniczkowy, geometria różniczkowa),
- część II (całka nieoznaczona, równania różniczkowe zwyczajne – metody elementarne, całka oznaczona, całki wielokrotne, krzywoliniowe i powierzchniowe, ciągi i szeregi funkcyjne, funkcje zespolone i przekształcenie Laplace’a),
- część III (równania różniczkowe zwyczajne – metody ogólne, równania fizyki matematycznej, przekształcenie Fouriera, macierze, rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna).

Materiał książki ułożono tak, aby wiadomości podstawowe były podane bez zbytniego rozbudowania treści pomocniczych. Uzupełnienia podano nieco dalej. Fragmenty, które można pominąć przy pierwszym czytaniu, oznaczono gwiazdkami. W książce znajduje się wiele przykładów.

Autorzy opracowują zbiór zadań dostosowany do układu „Zarysu” tak, aby Czytelnik mógł rozwiązywać zadania z zakresu poszczególnych rozdziałów. Autorzy wyrażają podziękowanie docentowi doktorowi B. Palczewskiemu za wykonanie recenzji całości książki, doktorowi A. Pacutowi za wnikliwą recenzję ostatnich dwóch rozdziałów, a docentowi doktorowi T. Staniszwowi za przeczytanie maszynopisu i wiele cennych uwag.

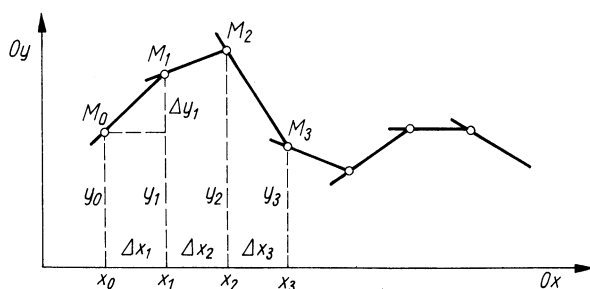
Pojęcie równania różniczkowego – zob. ZARYS cz. II, s. 46–53, 59–60.

§167. Metoda łamanych Eulera

Łamana Eulera. Rozważmy równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y) \quad (167.1)$$

w którym f oznacza funkcję dwóch zmiennych x, y ciągłą w pewnym obszarze D . Łamaną Eulera dla równania (167.1) nazywamy linię łamaną $M_0 M_1 M_2 M_3 \dots$ (rys. 167.1) leżącą w obszarze D i skonstruowaną w ten sposób, aby każdy z



Rys. 167.1

odcinków $M_0 M_1, M_1 M_2, M_2 M_3, \dots$ miał kierunek wyznaczony przez wartość funkcji f w punkcie początkowym tego odcinka (§ 104, cz. II, kreślenie krzywych całkowych). Łamaną Eulera konstruujemy następująco:

1. Obieramy w obszarze D punkt $M_0 = (x_0, y_0)$, zwany *punktem wyjściowym*. Podstawiając współrzędne tego punktu do prawej strony równania (167.1), obliczamy współczynnik kątowy

$$y'_0 = f(x_0, y_0)$$

elementu kierunkowego w punkcie M_0 i w kierunku wyznaczonym przez ten współczynnik kreślimy niezerowy odcinek $M_0 M_1$ dowolnej długości. Odcinek ten nazywamy pierwszym *ogniwem* łamanej Eulera, a punkt M_1 pierwszym *wierzchołkiem* tej łamanej.

2. Współrzędne punktu M_1 oznaczamy x_1, y_1 , a współrzędne wektora $\overrightarrow{M_0 M_1}$ oznaczamy

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 \quad \Delta y_1 = y_1 - y_0$$

Liczbę Δx_1 , różną od 0 i zwaną pierwszym krokiem łamanej, obieramy, natomiast liczbę Δy_1 wyliczamy z równości

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = y'_0 = f(x_0, y_0)$$

wyrażającej fakt, że wektor $\overrightarrow{M_0 M_1}$ ma kierunek wyznaczony przez wartość prawej strony równania w punkcie M_0 . W ten sposób współrzędne punktu M_1 są określone równościami

$$x_1 = x_0 + \Delta x_1, \quad y_1 = y_0 + \Delta y_1 = y_0 + y'_0 \Delta x_1$$

3. W punkcie M_1 wykonujemy te same czynności co w punkcie M_0 , tzn. podstawiając współrzędne tego punktu do prawej strony równania (167.1), obliczamy współczynnik kątowy

$$y'_1 = f(x_1, y_1)$$

obieramy drugi krok łamanej Δx_2 , przez co wyznaczamy drugie ogniwo i drugi wierzchołek łamanej, tj. punkt M_2 o współrzędnych

$$x_2 = x_1 + \Delta x_2 \quad y_2 = y_1 + \Delta y_2 = y_1 + y'_1 \Delta x_2$$

4. W punkcie M_2 wykonujemy te same czynności co w punkcie M_1 i w ten sposób konstruujemy łamaną $M_0 M_1 M_2 M_3 \dots$, przestrzegając aby wszystkie kroki $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$ były jednakowego znaku. Wyniki obliczeń zapisujemy w tabelicy

	x_0	y_0	$y'_0 = f(x_0, y_0)$
Δx_1	$x_1 = x_0 + \Delta x_1$	$y_1 = y_0 + y'_0 \Delta x_1$	$y'_1 = f(x_1, y_1)$
Δx_2	$x_2 = x_1 + \Delta x_2$	$y_2 = y_1 + y'_1 \Delta x_2$	$y'_2 = f(x_2, y_2)$
Δx_3	$x_3 = x_2 + \Delta x_3$	$y_3 = y_2 + y'_2 \Delta x_3$	$y'_3 = f(x_3, y_3)$
...			

Liczby napisane zewnątrz obramowania są wybierane, liczby napisane wewnątrz obramowania są obliczane na podstawie prawej strony równania. Zwykle przyjmujemy $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x$ i liczbę Δx nazywamy *krokiem* łamanej.

Łamana Eulera wychodząca z punktu M_0 jest przybliżeniem krzywej całkowej $y = y(x)$ wychodzącej z punktu M_0 . Inaczej mówiąc: rzędna łamanej odpowiadająca pewnej odciętej x jest przybliżeniem wartości $y(x)$ rozwiązania równania różniczkowego (167.1) przy warunku początkowym $y(x_0) = y_0$.

Przykład 167.1. Wyznaczyć rzędne łamanej Eulera dla równania

$$y' = y - x \tag{167.2}$$

obierając $x_0 = 0$, $y_0 = 0,5$ oraz krok $\Delta x = +0,1$. Ograniczyć się do trzech cyfr po przecinku.

	$x_0 = 0,0$	$y_0 = 0,5$	$y'_0 = y_0 - x_0 = 0,5$
0,1	$x_1 = 0,1$	$y_1 = 0,55$	$y'_1 = y_1 - x_1 = 0,45$
0,1	$x_2 = 0,2$	$y_2 = 0,595$	$y'_2 = y_2 - x_2 = 0,395$
0,1	$x_3 = 0,3$	$y_3 = 0,635$	$y'_3 = 0,335$
0,1	$x_4 = 0,4$	$y_4 = 0,668$	$y'_4 = 0,268$
...			

Uwaga. Dokładne rozwiązanie tego równania ma postać $y = x + 1 - e^x/2$, skąd dla $x = 0,4$ mamy, $y = 0,654$. Metodą łamanej Eulera otrzymaliśmy $y_4 = 0,668$. Błąd względny $(0,668 - 0,654)/0,654 = 2\%$. Zagadnienia oceny błędu nie będziemy tu rozważać. Zagadnienie to jest przedmiotem odrębnej gałęzi matematyki, tzw. *metod numerycznych*.

Przykład 167.2. Wyznaczyć rzędne łamanej Eulera dla równania

$$y' = x + y^2 \quad (167.3)$$

obierając $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ oraz krok $\Delta x = 0,01$. Obliczyć rzędną dla $x = 0,2$. Pozostawiając Czytelnikowi wykonanie rachunków, podajemy odpowiedź $y_{20} = 1,268$.

Uwaga. Równanie (167.3) nie jest całkowne elementarnie.

Istnienie rozwiązania. Krzywa całkowita równania (167.1), jeśli istnieje, powinna mieć w każdym swoim punkcie styczną o kierunku zgodnym z wartością prawej strony równania w tym punkcie. Łamana Eulera nie jest rozwiązaniem równania (167.1), gdyż tylko w wierzchołkach (i tylko jednostronnie) jej kierunek jest zgodny z równaniem, a w pozostałych punktach może nie być zgodny. Można sądzić, że konstruując ciąg łamanych Eulera o kroku dążącym do 0, otrzymamy ciąg łamanych zbieżny do krzywej całkowitej. Niestety tak nie jest, gdyż ciąg taki może nie być zbieżny. Jednak, jak udowodnił PEANO, z ciągu takiego można wybrać podciąg zbieżny do krzywej całkowitej, co stanowi jednocześnie metodę dowodu następującego twierdzenia (jest to dokładniejsze sformułowanie tw. 103.1).

Twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania

167.1. Jeśli prawa strona równania różniczkowego

$$y' = f(x, y) \quad (167.4)$$

jest funkcją ciągłą w prostokącie

$$G = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \quad (167.5)$$

$a > 0$, $b > 0$ (rys. 167.2), to istnieje co najmniej jedna funkcja

$$y = y(x) \quad (167.6)$$

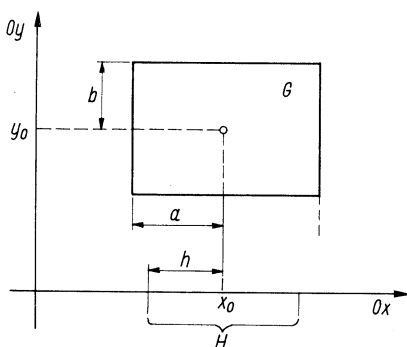
spełniająca warunek początkowy $y(x_0) = y_0$ i będąca rozwiązaniem tego równania w przedziale

$$H = \{x: |x - x_0| \leq h\} \quad (167.7)$$

gdzie

$$h = \min \{a, b/M\}, \quad M = \max_G |f(x, y)| \quad (167.8)$$

w przypadku $M > 0$, względnie $h = a$ w przypadku $M = 0$.



Rys. 167.2

§168. Metoda kolejnych przybliżeń (Picarda)

Zamiana równania różniczkowego na równanie całkowe

168.1. Jeśli prawa strona równania różniczkowego

$$y' = f(x, y) \quad (168.1)$$

jest funkcją ciągłą w prostokącie G (rys. 167.2), to równanie różniczkowe (168.1) z warunkiem początkowym

$$y(x_0) = y_0 \quad (168.2)$$

jest równoważne równaniu całkowemu

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (168.3)$$

Uwaga. Równanie (168.3) nazywamy *całkowym*, gdyż niewiadoma funkcja występuje pod znakiem całki. Równanie to wyraża pewien związek między wartością niewiadomej funkcji dla argumentu x a wartościami tej funkcji dla wszystkich argumentów s leżących między x_0 i x .

Dowód. Wykażemy, że każde rozwiązanie równania (168.1) spełniające warunek początkowy (168.2) jest rozwiązaniem równania (168.3) oraz, na odwrót, że każde rozwiązanie równania (168.3) w przedziale zawierającym x_0 jest rozwiązaniem równania (168.1) spełniającym warunek początkowy (168.2).

1. Załóżmy, że pewna funkcja $u(x)$, ciągła w pewnym przedziale E , $x_0 \in E$, spełnia w tym przedziale równość

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

oraz warunek początkowy (x_0, y_0) . Całkując tę równość obustronnie od x_0 do x , $x \in E$

$$\int_{x_0}^x u'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, u(s)) ds$$

otrzymujemy równość

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, u(s)) ds$$

skąd, zgodnie z warunkiem początkowym $u(x_0) = y_0$, otrzymujemy

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, u(s)) ds$$

co oznacza, że $u(x)$ spełnia w przedziale E równanie całkowe (168.3).

2. Załóżmy, że pewna funkcja $v(x)$, ciągła w pewnym przedziale E , $x_0 \in E$, spełnia w tym przedziale równość

$$v(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, v(s)) ds$$

Różniczkując tę równość, otrzymujemy

$$v'(x) = f(x, v(x))$$

co oznacza, że funkcja $v(x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego (168.1) w przedziale E . Przyjmując zaś górną granicę całkowania x równą x_0 , otrzymujemy $v(x_0) = y_0$, co oznacza, że funkcja $v(x)$ spełnia warunek początkowy (168.2). ■

Ciąg kolejnych przybliżeń rozwiązania równania całkowego

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad (168.4)$$

określamy w następujący sposób. W przedziale H ¹⁾ obieramy funkcję wyjściową

$$\varphi_0(x) = \text{const} = y_0 \quad x \in H$$
²⁾

Funkcję tę wstawiamy do prawej strony równania (168.4) w miejsce niewiadomej y . W wyniku tego podstawienia prawa strona tego równania staje się pewną funkcją

$$y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_0(s)) ds \quad x \in H$$

¹⁾ Przedział H jest określony związkami (167.7) i (167.8).

²⁾ Za $\varphi_0(x)$ można przyjąć dowolną funkcję ciągłą w H , mającą wykres przechodzący przez (x_0, y_0) i nie wychodzący poza prostokąt G .

ciągłą w H , a jej wykres przechodzi przez (x_0, y_0) i jest zawarty w G (udowadniamy to na s. 15). Gdyby się okazało, że funkcja ta jest w przedziale H równa funkcji wyjściowej $\varphi_0(x)$, to oznaczaloby, że obierając $\varphi_0(x)$, natrafiliśmy na rozwiązanie równania (168.4). Na ogół tak nie jest, funkcja ta jest różna od funkcji wyjściowej; nazywamy ją *pierwszym kolejnym przybliżeniem* i oznaczamy $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_0(s)) ds \quad x \in H \quad (168.5)$$

Z kolei, podstawiając funkcję $\varphi_1(x)$ do prawej strony równania (168.4), otrzymujemy pewną nową funkcję, którą oznaczamy $\varphi_2(x)$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_1(s)) ds \quad x \in H \quad (168.6)$$

i którą nazywamy *drugim kolejnym przybliżeniem*.

Postępując w ten sposób, otrzymujemy *ciąg kolejnych przybliżeń*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x), \dots \quad (168.7)$$

określonych wzorem

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_n(s)) ds \quad (168.8)$$

Przy założeniach, które poniżej precyzujemy, ciąg kolejnych przybliżeń jest zbieżny do pewnej *funkcji granicznej* $\varphi(x)$, która jest rozwiązaniem równania (168.4). Poszczególne zaś funkcje (168.7) są przybliżeniami tego rozwiązania.

Uwaga. Gdyby funkcja $\varphi_k(x)$ dla pewnego k okazała się rozwiązaniem równania (168.4), to zachodziłaby równość $\varphi_k(x) = \varphi_{k+1}(x) = \dots = \varphi(x)$.

Twierdzenie Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania

168.2.¹⁾ *Jeśli prawa strona równania*

$$y' = f(x, y) \quad (168.9)$$

jest funkcją ciągłą w prostokącie G i spełnia w tym prostokącie warunek Lipschitza względem y z pewną stałą N

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq N |y - \bar{y}| \quad (168.10)$$

to w przedziale H istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego równania spełniające warunek początkowy (x_0, y_0) . Rozwiązaniem tym jest funkcja graniczna ciągu kolejnych przybliżeń (168.7)

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \quad (168.11)$$

¹⁾ Jest to pełne sformułowanie tw. 103.2 z cz. II.