

Jacek Jakubowski | Andrzej Palczewski
Marek Rutkowski | Łukasz Stettner

MATEMATYKA FINANSOWA

Instrumenty pochodne



MATEMATYKA FINANSOWA

Pod redakcją Marka Rutkowskiego

Jacek Jakubowski | Andrzej Palczewski
Marek Rutkowski | Łukasz Stettner

MATEMATYKA FINANSOWA

Instrumenty pochodne

Wydanie drugie

Wydawnictwo WNT



[Kup książkę](#)

Recenzenci:

dr hab. Piotr Jaworski

prof. dr hab. Adam Paszkiewicz

Redaktor naukowy: *dr hab. Marek Rutkowski*

Redaktor WNT: *Małgorzata Rajwacka-Jachymek*

Projekt okładki i stron tytułowych: *Anna Gogolewska*

Zdjęcie na okładce: *Vlastimil Ā estĀjk /123RF*

Redaktor techniczny: *Barbara Chojnacka-Flisiuk*

Korekta: *Zespół*

Skład i łamanie: *Jan Palczewski*

Wydawca: *Karol Zawadzki*

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo

Więcej na www.legalnakultura.pl

Polska Izba Książki

Copyright © by Wydawnictwo WNT

Warszawa 2003, 2006

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA

Warszawa 2018

ISBN 978-83-01-20042-8

Wydanie II – 1 dodruk (PWN)

Warszawa 2018

Wydawnictwo Naukowe PWN SA

02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2

tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288

infolinia 801 33 33 88

e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl

www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

[Kup książkę](#)

Spis treści

Przedmowa	7
---------------------	---

Rozdział 1

Marek Rutkowski

Instrumenty pochodne	9
1.1. Kontrakty terminowe forward i futures	9
1.2. Finansowe kontrakty futures	13
1.3. Ceny kontraktów terminowych	21
1.4. Klasyfikacja opcji	26
1.5. Rynki opcji	31
1.6. Strategie opcyjne	35
1.7. Arbitrażowa wycena instrumentów pochodnych	39
Bibliografia	62

Rozdział 2

Jacek Jakubowski

Wprowadzenie do analizy stochastycznej	65
2.1. Warunkowa wartość oczekiwana	66
2.2. Martynały, momenty stopu, martynały lokalne	72
2.3. Proces Wienera	91
2.4. Całka Itô	96
2.5. Wzór Itô	102
2.6. EkspONENTA stochastyczna	107
2.7. Twierdzenie o reprezentacji, zamiana miary	110
2.8. Wzór Feynmana-Kaca	115
2.9. Przykład zastosowania: wzór Blacka-Scholesa	117
2.10. Dodatek: jednostajna całkowalność	121
Bibliografia	124

Rozdział 3

Łukasz Stettner

Wycena instrumentów pochodnych w czasie dyskretnym 127

3.1.	Model rynku finansowego z czasem dyskretnym	127
3.2.	Pojęcie arbitrażu	129
3.3.	Wycena kontraktów europejskich	133
3.4.	Zupełność modelu rynku finansowego	140
3.5.	Zabezpieczenie kwantylowe	145
3.6.	Zabezpieczenie poprzez funkcję użyteczności	153
3.7.	Miary martyngałowe o minimalnej entropii	164
	Bibliografia	171

Rozdział 4

Andrzej Palczewski

Wycena instrumentów pochodnych w czasie ciągłym 173

4.1.	Model rynku finansowego z czasem ciągłym	174
4.2.	Wycena martyngałowa instrumentów pochodnych	179
4.3.	Model Blacka-Scholesa	182
4.4.	Wycena instrumentów w modelu Blacka-Scholesa	185
4.5.	Przykłady wyceny w modelu Blacka-Scholesa	191
4.6.	Analiza wrażliwości	198
4.7.	Zmienność cen akcji	199
4.8.	Kontrakty terminowe	200
4.9.	Opcje amerykańskie	203
4.10.	Rynki niezupełne	208
	Bibliografia	215

Rozdział 5

Marek Rutkowski

Instrumenty pochodne stóp procentowych 217

5.1.	Modelowanie cen obligacji	217
5.2.	Modele stopy krótkoterminowej	223
5.3.	Metoda Heatha, Jarrowa i Mortona	239
5.4.	Metoda miary martyngałowej forward	246
5.5.	Wycena opcji w gaussowskim modelu HJM	252
5.6.	Transakcje procentowe typu <i>cap</i> i <i>floor</i>	266
5.7.	Swapcje	270
5.8.	Obligacje z ryzykiem kredytowym	275
5.9.	Model Mertona	284
5.10.	Własności momentów dojścia do bariery	291
5.11.	Model Blacka i Coxa	302
	Bibliografia	311

Skorowidz	315
---------------------	-----

Przedmowa

Matematyka finansowa jest dzisiaj jedną z najszybciej rozwijających się dziedzin matematyki stosowanej. Można zastanawiać się nad tym, kiedy ekonomiści docenili potęgę metod ilościowych i bogactwo matematycznego opisu otaczającej nas ekonomicznej rzeczywistości. Na pewno jednak ostatnią dekadę XX w. można uznać za kluczowy okres, czego wyrazem było choćby przyznanie w 1997 r. Nagrody Nobla z ekonomii amerykańskim profesorom, Robertowi C. Mertonowi i Myronowi S. Scholesowi. Dokonali oni przełomu w zagadnieniach wyceny instrumentów finansowych, wprowadzając już w latach siedemdziesiątych matematyczne idee wyceny arbitrażowej.

Rozwój rynków finansowych na świecie skłonił instytucje finansowe do podjęcia badań nad wykorzystaniem szerokiego aparatu matematycznego do własnych celów. Tym samym powstało zapotrzebowanie na specjalistów z matematyki finansowej, co z kolei przyczyniło się do ogromnego zainteresowania tą dziedziną osób studiujących matematykę i ekonomię. Wykładowcy wyższych uczelni znaleźli się niejako pod presją wywieraną przez studentów, domagających się wprowadzenia do programu studiów wykładów związanych z matematyką finansową. Istotnym utrudnieniem w realizacji takich propozycji okazał się brak odpowiedniej literatury – i to nie tylko w Polsce, ale i na świecie.

Wiosną 2000 r., po konferencji poświęconej nauczaniu matematyki na uczelniach technicznych prof. Agnieszka Plucińska postulowała znalezienie sposobu na przybliżenie szeroko rozumianemu środowisku matematycznemu kierunków i osiągnięć matematyki związanych z finansami. W związku z tym, w lipcu 2001 r. w Ośrodku Konferencyjnym IMPAN w Będlewie prof. Łukasz Stettner zorganizował Letnią Szkołę z Matematyki Finansowej. Przedsięwzięcie to zostało poparte przez Centrum Banacha i Centrum Doskonałości IMPAN-BC. Liczba zgłoszeń do Letniej Szkoły w Będlewie przerosła oczekiwania organi-

zatorów – przyjechało 85 osób zamiast „planowanych” 60. Letnia Szkoła odbywała się w dniach 2–10 lipca 2001 r. Wykładowcami byli profesorowie: Jacek Jakubowski (UW i PW), Karol Krzyżewski (UW), Andrzej Palczewski (UW), Marek Rutkowski (PW i IMPAN), Łukasz Stettner (IMPAN), Aleksander Weron (PWr) oraz dr Rafał Weron (PWr). Mimo upalnej pogody sala wykładowa była zawsze pełna, po wykładach zaś toczyły się liczne dyskusje. Ponieważ istotna część wykładanego materiału była przygotowana w formie pisemnej, po zakończeniu Szkoły powstała koncepcja opracowania wykładów w formie książkowej. Dodatkowym impulsem do napisania książki był grant przyznany przez Komitet Badań Naukowych (PBZ-KBN-016/P03/99) pt. *Metody matematyczne w analizie rynków i instrumentów finansowych w Polsce*. Znaczną część prac nad podręcznikiem zrealizowano w ramach tego grantu. Prace te były również stymulowane przez redaktorów z Redakcji Matematyki i Fizyki WNT: Zofię Leszczyńską, Liliannę Szymańską i Małgorzatę Rajwacką-Jachymek, którym autorzy niniejszej książki pragną podziękować.

Podręcznik zawiera wstęp do modelowania rynków finansowych i wyceny instrumentów pochodnych. Pomyślany został dla Czytelnika będącego studentem lub absolwentem matematyki, fizyki, nauk ekonomicznych bądź technicznych, zaznajomionego z podstawami rachunku prawdopodobieństwa. Książka składa się z pięciu rozdziałów. W pierwszym, wstępnym rozdziale przedstawiono zasady funkcjonowania rynków finansowych i omówiono ważniejsze klasy instrumentów pochodnych. W rozdziale drugim wprowadzono podstawowe pojęcia analizy stochastycznej, z których korzysta się w dalszej części pracy. W rozdziale trzecim omówiono elementy wyceny instrumentów finansowych w czasie dyskretnym; zagadnienia te w ostatnich latach przybrały postać ugruntowanej teorii. W rozdziale czwartym wycena instrumentów finansowych została rozważona w czasie ciągłym; nawiązano przy tym do najbardziej spektakularnego wyniku teoretycznego, jakim jest model Blacka-Scholesa. W rozdziale piątym opisano modele stopy terminowej i ryzyka kredytowego, które to modele w ostatnich latach cieszą się szczególnym zainteresowaniem specjalistów.

Niniejsza książka może być podstawą cyklu semestralnych wykładów monograficznych, odpowiadających kolejnym rozdziałom. Autorzy zachęcają Czytelników do zagłębienia się w licznie cytowaną literaturę – są to często najnowsze publikacje – oraz życzą wszystkim zainteresowanym przyjemnego studiowania matematyki finansowej. Pragną też podziękować swoim magistrantom i doktorantom, którzy w różny sposób przyczynili się do powstania tego podręcznika.

Jacek Jakubowski, Andrzej Palczewski
Marek Rutkowski, Łukasz Stettner

Warszawa, 4 listopada 2002 r.

Instrumenty pochodne

W niniejszym rozdziale wprowadzającym przedstawimy w skrócie zasady funkcjonowania rynków finansowych instrumentów pochodnych (*financial derivatives*) oraz omówimy najważniejsze klasy takich instrumentów. Podamy również wstępne informacje dotyczące modelowania finansowego oraz tzw. arbitrażowej metody wyceny instrumentów pochodnych (*arbitrage pricing*). W dalszych rozdziałach naszym celem będzie przedstawienie podstawowych technik matematycznych i wyników przydatnych do budowania modeli rynków finansowych w czasie ciągłym i w czasie dyskretnym oraz do posługiwania się tymi modelami przy rozwiązywaniu problemów pojawiających się w praktyce rynkowej.

Informacje zawarte w tym rozdziale, choć wystarczające do lektury dalszej części niniejszej książki, nie wyczerpują całości zagadnień związanych z funkcjonowaniem giełdowych i pozagiełdowych rynków instrumentów pochodnych. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do następujących pozycji: Chance (1989), Dubofsky (1992), Duffie (1989), Hull (1997), Ritchken (1987), Taleb (1997). Podstawowe informacje dotyczące metod matematycznych stosowanych w modelowaniu finansowym i tzw. inżynierii finansowej można znaleźć w książkach: Baxter i Rennie (1996), Boyle (1992), Cox i Rubinstein (1985), Neftci (1996) oraz Weron i Weron (1998).

1.1. Kontrakty terminowe forward i futures

Kontrakty terminowe i opcyjne były zawierane na europejskich giełdach towarowych od wielu stuleci. Trzeba więc podkreślić, że w niniejszej książce będziemy zajmować się jedynie tzw. nowoczesnymi finansowymi instrumentami pochodnymi, a więc instrumentami, których historia jest stosunkowo krótka. Za

jej początek można przyjąć rok 1973, tzn. datę inauguracji działalności giełdy kontraktów opcyjnych w Chicago. Od tej chwili nastąpił tak gwałtowny rozwój rynków instrumentów pochodnych, że trudno byłoby dziś znaleźć instrument finansowy (akcję, obligację, indeks giełdowy, kurs walutowy, stopę procentową), który nie stanowiłby podstawy dla jakiegoś instrumentu pochodnego. W większości krajów o rozwiniętych systemach finansowych, obok tradycyjnych giełd towarowych i giełd papierów wartościowych (które to giełdy w wielu przypadkach również wprowadziły na swoje parkiety instrumenty pochodne), funkcjonują również wyspecjalizowane giełdy instrumentów pochodnych. Daleko niepełna lista giełd instrumentów pochodnych obejmuje w szczególności: Chicago Board Options Exchange (CBOE), New York Futures Exchange (NYFE), London International Financial Futures and Options Exchange (LIFFE), Tokyo International Financial Futures Exchange (TIFFE), Marché à Terme International de France (MATIF), Sydney Futures Exchange (SFE) oraz Singapore International Monetary Exchange (SIMEX).

Z uwagi na dominującą rolę rynku amerykańskiego i brytyjskiego (a właściwie londyńskiego) w dziedzinie transakcji pochodnych, będziemy wielokrotnie posługiwać się przykładami zaczerpniętymi z praktyki giełd opcyjnych i terminowych działających w Stanach Zjednoczonych, jak również z londyńskiego rynku terminowego LIFFE. Doświadczenia polskiego rynku giełdowego w tym względzie są stosunkowo ubogie. Jednakże ze względu na otwartość i wzajemne powiązania rynków finansowych, relatywnie niewielka różnorodność instrumentów pochodnych na lokalnym rynku nie oznacza, że omawiane poniżej instrumenty pochodne są niedostępne dla polskich instytucji finansowych. Czytelnikowi zainteresowanemu obecnym stanem polskiego rynku instrumentów pochodnych i perspektywami jego rozwoju możemy polecić lekturę kwartalnika „Rynek terminowy”.

Negocjowane i giełdowe kontrakty terminowe

Na światowych rynkach finansowych występują dwa podstawowe typy kontraktów terminowych, znane w powszechnie używanej terminologii anglosaskiej jako *forward contracts* oraz *futures contracts*. Najistotniejsza różnica między tymi dwiema klasami kontraktów terminowych polega na tym, że kontrakty forward są zawierane wyłącznie na rynku pozagiełdowym kontraktów negocjowanych (tzw. *over-the-counter market* lub w skrócie *OTC market*), a więc są indywidualnie negocjowane między dwiema stronami każdej umowy. W rezultacie tradycyjne kontrakty forward kończą się z reguły dostawą w określonym terminie. Ponadto, żadna ze stron kontraktu forward nie ma możliwości rezygnacji z wypełnienia warunków zawartej umowy, nawet w sytuacji, gdy jest jasne, że poniesie ona znaczne straty w wyniku realizacji tego kontraktu.