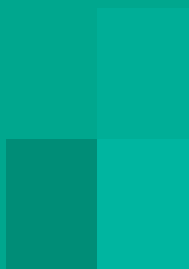


Krzysztof MAURIN

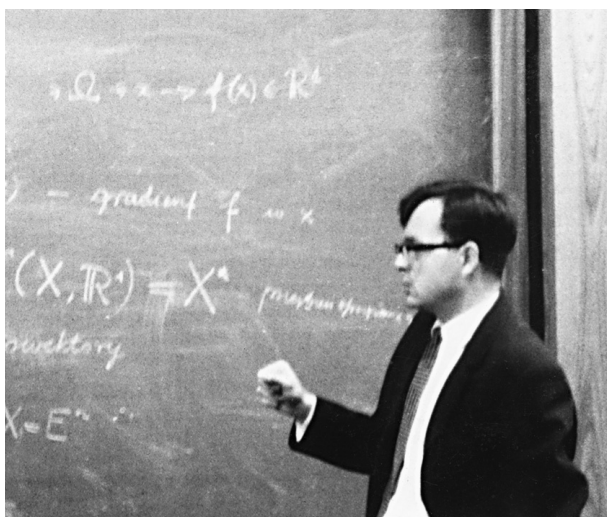
ANALIZA

część III



BM

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N



Profesor Krzysztof Maurin

Krzysztof Maurin (ur. 1923) jest wybitnym polskim uczonym, matematykiem i fizykiem matematycznym, profesorem zwyczajnym na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (obecnie na emeryturze), specjalistą w zakresie metod przestrzeni Hilberta i teorii reprezentacji grup, autorem wielu prac naukowych, monografii matematycznych oraz trzyczęściowego podręcznika *Analiza*. Bardzo ważnym Jego dziełem jest także stworzenie Katedry Metod Matematycznych Fizyki na Uniwersytecie Warszawskim. Sposób prowadzenia wykładu i traktowania matematyki, różnorodność zainteresowań Profesora, wielki wkład pracy i troska o wykształcenie i wychowanie uczniów zaowocowały powstaniem matematycznej szkoły naukowej i dydaktycznej, znacznie przekraczającej ramy organizacyjne KMMF. Zainteresowania i działalność naukowa Profesora Maurina to nie tylko matematyka i fizyka; od wielu lat prowadzi interdyscyplinarne seminarium, którego tematyka, związana początkowo z metodami i znaczeniem nauk przyrodniczych, z czasem obejmowała szersze obszary, takie jak język, symbol, triada człowiek–świat–Bóg, sztuka, religia. Podobnie ewoluowała tematyka wykładów monograficznych Profesora – od czysto matematycznych do takich, których głównym tematem była filozofia i teologia.

Profesor Krzysztof Maurin jest jedną z najwybitniejszych postaci Uniwersytetu Warszawskiego. Jego działalność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna pozostawia trwały ślad w nauce polskiej i dziejach Uniwersytetu Warszawskiego.

Zdjęcie publikujemy dzięki uprzejmości Katedry Metod Matematycznych Fizyki UW

[Kup książkę](#)

ANALIZA

Krzysztof MAURIN

ANALIZA

część III

Analiza zespolona,
dystribucje,
analiza harmoniczna



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2010

[Kup książkę](#)

Książka jest reprintem wydania z 1991 r.,
które ukazało się nakładem Wydawnictwa Naukowego PWN
jako tom 71 BIBLIOTEKI MATEMATYCZNEJ

Z wydania angielskiego przetłumaczył
TOMASZ SZAPIRO

Projekt okładki i stron tytułowych
MAŁGORZATA PODZIOMEK

Redaktor
JANINA SOLARSKA

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN Sp. z o.o.
Warszawa 1991

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2010

ISBN 978-83-01-16231-3 cz. III
ISBN 978-83-01-16232-0 cz. I–III

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 22 69 54 321
faks 22 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

[Kup książkę](#)

PRZEDMOWA DO CZĘŚCI III WYDANIA POLSKIEGO

W rozdziale XII, Ogólne struktury matematyki (cz. II) starałem się pokazać Czytelnikowi *panoramę* współczesnej matematyki i opowiedzieć historię rodzenia się jej podstawowych pojęć i struktur. Struktury te wyrosły przecież z potrzeb *klasycznej* matematyki: analizy zespolonej, geometrii różniczkowej i analizy harmonicznej.

W niniejszej części, która w zasadzie zakłada jedynie znajomość elementów topologii ogólnej i całkowania form różniczkowych, wnikamy najpierw głębiej w analizę zespoloną. Idziemy drogą Riemanna, dla którego teoria potencjału, na powierzchniach związanych nierozzerwalnie z jego imieniem, była głównym narzędziem. Teoria potencjału (funkcje harmoniczne, pod- (i nad) harmoniczne) osiągnęła w naszym stuleciu formę doskonałą dzięki pracom Lebesgue'a, Perrona, Brelota, Frostmana i innych. Zagadnienia Dirichleta, tzn. problem istnienia i przyjmowania zadanych wartości brzegowych przez funkcję harmoniczną, doprowadził do pojęcia miary harmonicznej i przestrzeni harmonicznej (Brelot, H. Bauer i inni). Niewątpliwie jest to kontynuacja i dalszy rozwój idei Riemanna.

Jak wiemy, grupa podstawowa $\pi_1(M)$ rozmaitości M i jej badanie w związku z grupą nakryć Deck ($\tilde{M} \rightarrow M$) jest dziełem Poincarégo i ma bliskie analogie z teorią Galois (rozwinętą w części II). Kulminacyjnym punktem teorii powierzchni Riemanna jest twierdzenie o uniformizacji (Koebe–Poincaré), koronujące wysiłki wielu wielkich matematyków – przede wszystkim Felixa Kleina i Henri Poincarégo.

Z teorią powierzchni nakrywających $\tilde{M} \rightarrow M$ powierzchni Riemanna jest nierozzerwalnie związana teoria funkcji (i form) *automorficznych*, gdy $\Gamma = \text{Deck}(\tilde{M} \rightarrow M)$ jest grupą nakryć, wtedy funkcja meromorficzna f na powierzchni M podnosi się do funkcji (meromorficznej) $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$, Γ -niezmienniczej: $\tilde{f}(\gamma\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$, $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Funkcje te stanowią ciało i właśnie badanie ich było głównym impulsem powstania ogólnej teorii ciał. Najlepiej zbadanymi funkcjami automorficznymi są funkcje *eliptyczne* (czyli funkcje meromorficzne na torusach), których powstanie zawdzięczamy Abelowi i Jacobiemu. Cudowna eliptyczna funkcja modułowa Dedekinda–Kleina ma olbrzymie znaczenie także w teorii liczb. Charakterystycznym jest, że Klein uważał znajomość „figury modułowej” za podstawę wykształcenia matematyka.

Jak wiemy, *twierdzenie Riemanna–Rocha* jest fundamentem teorii zwartych powierzchni Riemanna (poznaliśmy dwa jego dowody w części II). W rozdziale XVI

podajemy, bez dowodu, jego sformułowanie i przytaczamy wiele zastosowań. Twierdzenie Abela, rozwiązanie problemu odwrotnego Jacobiego oraz pojęcie torusa Jacobiego (*jakobianu*) zwartej powierzchni Riemanna zamykają ten rozdział. W dodatku, grupy trójkątne (Schwarza) nawiązują do prastarej idei ciał platońskich.

Jak wspomnieliśmy w wykładzie teorii Dedekinda i Webera (rozdz. XIII), konstrukcja Dedekinda i Webera abstrakcyjnej powierzchni Riemanna ciała funkcji algebraicznych (jako zbiorów ideałów maksymalnych odpowiedniego pierścienia waluacyjnego) jest prekursorem teorii ideałów maksymalnych Gelfanda. Jak się wydaje, wielki Gelfand nie znał wtedy teorii Dedekinda i Webera! Teoria Gelfanda naszkicowana jest w rozdziale XVII. Niestety, nie mogliśmy rozwinąć ogólnej analizy harmonicznej na tej bazie, ale „na otarcie łez” podajemy dowód twierdzenia spektralnego Hilberta według Gelfanda–Najmarka i jego związek z mechaniką kwantową.

Rozdział XVIII poświęcony jest nieskończonym iloczynom tensorowym miar i ich granicom rzutowym. Fundamentalne twierdzenia Kołmogorowa i Prochorowa podane są w §4 rozdziału XVIII.

Teoria całki (Daniella–Stone’a–Radona) ma naturalne rozszerzenie do teorii dystrybucji Laurenta Schwartza, wyrosłej z analizy harmonicznej, której poświęcony jest rozdział ostatni. Teoria całki Haara — tzn. niezmienniczej całki Radona na grupie lokalnie zwartej — i wstęp do teorii reprezentacji grup lokalnie zwartych oraz Dodatek kończą naszą książkę.

Lektura niniejszego tomu powinna raz jeszcze przekonać Czytelnika, że „konkretne problemy są krwią serdeczną matematyki” (Weyl) i że to w nich tkwią *główne trudności*. Ogólne struktury i pojęcia są *Logosem*, który łączy ogrom zjawisk matematycznych w cudowny organizm matematyki. Logos ten bez ustawicznego zgłębiania tych podstawowych, konkretnych problemów usechłby i stał się martwym szkieletem.

*

* * *

Ta trzyczęściowa *Analiza* powstawała przez lat 20. Różne jej partie obrazują pogląd autora na matematykę zmieniającą się z biegiem lat. Stąd zmiana stylu wykładu, który w niektórych miejscach przybierał charakter eseju. Historii matematyki nie można oddzielić od jej formy i treści! Ta niejednorodność ujęcia była gehenną dla doc. Tomasza Szapiro i redaktora pani Janiny Solarskiej. Ich pełna oddania i wyrzeczenia praca jest źródłem mej niewymownej wdzięczności i poczucia zażenowania, że nie byłem w stanie oddać lepszego rękopisu.

Kierownikowi Redakcji Matematyki PWN redaktorowi Włodzimierzowi Muszyńskiemu wdzięczny jestem za wielką cierpliwość i wyrozumiałość (niedotrzymywanie terminów i nieprzewidziany rozrost tekstu) dla Jego starego nauczyciela.

Krzysztof Maurin

SPIS RZECZY

Rozdział XV. Podstawowe własności funkcji holomorficznych wielu zmiennych. Funkcje harmoniczne

§1. Odwzorowania holomorficzne. Równania Cauchy'ego–Riemanna	9
§2. Formy różniczkowe na rozmaitości zespolonej. Formy typu (p, q) . Operatory d' i d''	15
§3. Wzór Cauchy'ego i jego zastosowania	21
§4. Topologia przestrzeni funkcji holomorficznych $A(\Omega)$	28
§5. Podstawowe własności funkcji harmonicznych	32
§6. Funkcje Greena. Wzór całkowy Poissona. Twierdzenia Harnacka	42
§7. Funkcje podharmoniczne. Rozwiązanie Perrona problemu Dirichleta	47

Rozdział XVI. Jednowymiarowa analiza zespolona (powierzchnie Riemanna)

§1. Zera funkcji holomorficznych jednej zmiennej zespolonej	55
§2. Funkcje holomorficzne w pierścieniu. Rozwinięcie w szereg Laurenta. Punkty osobliwe	62
§3. Funkcje meromorficzne	72
§4. Zastosowanie residuów do obliczania całek	77
§5. Zastosowania zasady argumentu	85
§6. Funkcje i formy różniczkowe na powierzchniach Riemanna	89
§7. Przedłużenie analityczne. Nakrycia. Grupa podstawowa. Teoria Poincarégo	101
§8. Twierdzenie Koebe–Riemanna. Geometria nieeuklidesowa. Przekształcenia Möbiusa	131
§9. Metoda Perrona dla powierzchni Riemanna. Twierdzenie Radó	153
§10. Funkcje rezolutywne. Miary harmoniczne. Twierdzenie Brelota	164
§11. Funkcja Greena powierzchni Riemanna	171
§12. Twierdzenie o uniformizacji	176
§13. Twierdzenie Runego. Twierdzenie Behnkego i Steina. Twierdzenie Malgrange'a	180
§14. Problemy Cousina w otwartych powierzchniach Riemanna. Twierdzenia Mittag-Lefflera i Weierstrassa	185
§15. Przykłady ułamków prostych i rozkładu na ułamki proste. Funkcje $\cos \pi z$, $\pi^2/\sin^2 \pi z$, $\Gamma(z)$. Wzory Mellina i Hankla. Iloczyny kanoniczne	192
§16. Funkcje eliptyczne. Szeregi Eisensteina. Funkcja $\wp$	197
§17. Funkcje i formy modułowe. Figura modułowa, nieciągłe grupy automorfizmów	207
§18. Wzór na krotność zer formy modułowej. Wymiar przestrzeni wektorowych $M^0(k, \Gamma)$ form parabolicznych	223
§19. Własności odwzorowania j . Twierdzenie Picarda. Krzywe eliptyczne. Problem odwrotny Jacobiego. Twierdzenie Abela	226
§20. Zasada uniformizacji. Formy automorficzne. Twierdzenie Riemanna–Rocha i jego konsekwencje. Szkic historyczny	235
§21. Dodatki. Ćwiczenia (dowody twierdzeń Runego, Florack, Koebe i Hurwitza, grupy trójkątne, całki eliptyczne i liczby przestępne)	263
§22. Problem Riemanna–Hilberta	281

Rozdział XVII. Przestrzenie normalne Tichonowa i parazwarte. Teoria Gelfanda. Rozkład jedności

§ 1. Przestrzenie lokalnie zwarte przeliczalne w nieskończoności	283
§ 2. Przestrzenie normalne. Lemat Urysohna	285
§ 3. Rozszerzenie funkcji ciągłych na przestrzeniach normalnych	289
§ 4. Przestrzenie Tichonowa. Uniformizowanie. Uzwarzenie	291
§ 5. Teoria ideałów maksymalnych	295
§ 6. Teoria ideałów maksymalnych (według Gelfanda)	300
§ 7. Związek z mechaniką kwantową	304
§ 8. Rodziny lokalnie skończone	305
§ 9. Przestrzenie parazwarte. Rozkład jedności. Parazwartość przestrzeni metrycznych	307

Rozdział XVIII. Odwzorowania mierzalne. Transport miary. Sploty miar i funkcji

§ 1. Odwzorowania mierzalne	314
§ 2. Topologie wyznaczone przez rodziny odwzorowań	315
§ 3. Transport miary	317
§ 4. Granice rzutowe przestrzeni Hausdorffa. Nieskończone iloczyny tensorowe i granice rzutowe miar	318
§ 5. Sploty miar i funkcji	322
§ 6. Sploty funkcji i miar na R^p	325
§ 7. Sploty funkcji całkowalnych	325

Rozdział XIX. Teoria dystrybucji. Analiza harmoniczna

§ 1. Przestrzeń $C_0^\infty(\Omega)$	327
§ 2. Różniczkowalny rozkład jedności na R^n	331
§ 3. Przestrzeń funkcji próbnych. Dystrybucje	332
§ 4. Granice induktywne. Topologia przestrzeni $\mathcal{D}$	335
§ 5. Zasada sklejania dystrybucji. Nośnik dystrybucji	337
§ 6. Przestrzeń $\mathcal{E}(\Omega)$. Dystrybucje o nośnikach zwartych	338
§ 7. Działania na dystrybucjach	340
§ 8. Algebra splotowa $\mathcal{E}'(R^n)$	347
§ 9. Obraz prosty dystrybucji	348
§ 10. Uwagi o iloczynach tensorowych $E \otimes F$ i $E \hat{\otimes} F$. Twierdzenie o jądrze	349
§ 11. Iloczyn tensorowy $E \otimes F$ przestrzeni Hilberta	351
§ 12. Regularyzacja dystrybucji	354
§ 13. Przykłady dystrybucji ważnych w zastosowaniach	356
§ 14. Transformacja Fouriera. Przestrzeń $\mathcal{S}$	360
§ 15. Transformacja Fouriera jako operator unitarny na przestrzeni $\mathcal{L}^2(R^n)$	366
§ 16. Dystrybucje temperowane. Transformacja Fouriera w $\mathcal{S}'$	367
§ 17. Transformacja Laplace'a–Fouriera dla funkcji i dystrybucji. Twierdzenie Paleya–Wienera–Schwartz'a	372
§ 18. Rozwiązania podstawowe operatorów różniczkowych	375
§ 19. Funkcje dodatnio określone. Dystrybucje dodatnie. Twierdzenia Bochnera i Minłosa	377
§ 20. Reprezentacje grup lokalnie zwartych. Związek między reprezentacjami unitarnymi i funkcjami dodatnio określonymi	381
§ 21. Całka Haara	389

Dodatek. Twierdzenie Sarda. Lemat Thoma. Twierdzenie Whitneya	396
---	-----

Skorowidz oznaczeń	402
------------------------------	-----

Skorowidz nazwisk	407
-----------------------------	-----

Skorowidz nazw	410
--------------------------	-----

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI FUNKCJI HOŁOMORFICZNYCH WIELU ZMIENNYCH. FUNKCJE HARMONICZNE

Niniejszy rozdział składa się z dwóch części. W pierwszej dowodzimy kilku podstawowych własności odwzorowań holomorficzych oraz zespolonych (to znaczy o wartościach w zbiorze liczb zespolonych) form różniczkowych na rozmaitościach zespolonych.

Najważniejszym twierdzeniem tej części jest zapewne twierdzenie Montela–Stieltjesa–Vitalego, które mówi, że przestrzeń $A(\mathcal{O})$ funkcji holomorficzych (na dziedzinie $\mathcal{O} \in C^n$) jest przestrzenią Montela. Głębsze twierdzenia analizy zespolonej będziemy rozważali w rozdziale XVI i w części IV książki.

Rzeczywista i urojona część funkcji holomorficzej są funkcjami harmonicznymi; zatem funkcje harmoniczne mają wiele własności funkcji holomorficzych: są analityczne, spełniają zasadę maksimum, posiadają własność wartości średniej (na sferach), a przestrzeń $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ funkcji harmoniczych jest przestrzenią Montela. Stąd druga część (paragrafy 5–7) tego rozdziału poświęcona jest formom harmonicznym, które są także nazywane *funkcjami potencjalowymi*.

Całkowy wzór Poissona (paragraf 6) jest bardzo skutecznym narzędziem badania form harmoniczych. Zasada maksimum jest prawdziwa dla szerszej klasy funkcji $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ – funkcji podharmoniczych. Funkcje te oraz *zasada Harnacka* umożliwiły Oskarowi Perronowi rozwinąć piękną, prostą i ogólną metodę rozwiązywania problemu Dirichleta dla stosunkowo ogólnych dziedzin w $\mathbb{R}^m$ (paragraf 7). Ta część obecnego rozdziału może być traktowana jako pierwsze wstępne wprowadzenie do teorii potencjału.

§ 1. Odwzorowania holomorficzne. Równania Cauchy’ego–Riemanna

Przypomnijmy kilka podstawowych pojęć algebry liniowej.

Owzorowanie liniowe i antyliniowe. Niech E i F będą zespolonymi przestrzeniami wektorowymi.

DEFINICJA. 1° Odwzorowanie $u: E \rightarrow F$ jest C -liniowe, jeśli

$$u(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha u(e_1) + \beta u(e_2)$$

dla $\alpha, \beta \in C, e_1, e_2 \in E$.

2° Odwzorowanie $v: E \rightarrow F$ jest antyliniowe, jeśli

$$v(\alpha e_1 + \beta e_2) = \bar{\alpha} v(e_1) + \bar{\beta} v(e_2)$$

dla $\alpha, \beta \in C, e_1, e_2 \in E$.

3° Odwzorowanie $w: E \rightarrow F$ jest R -liniowe, jeśli

$$w(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha w(e_1) + \beta w(e_2)$$

dla dowolnych $\alpha, \beta \in R, e_1, e_2 \in E$.

Będziemy oznaczać przez $L_C(E, F)$ (odpowiednio $L_{\bar{C}}(E, F)$ i $L_R(E, F)$) przestrzeń C -liniowych (odpowiednio antyliniowych i R -liniowych) odwzorowań $E \rightarrow F$.

Zachodzi następujący prosty lemat:

LEMAT XV.1.1. Niech E i F będą przestrzeniami wektorowymi nad C . Dla dowolnego R -liniowego odwzorowania $u: E \rightarrow F$ oznaczmy

$$(1) \quad \begin{aligned} u'(e) &:= \frac{1}{2}(u(e) - iu(ie)), & e \in E, \\ u''(e) &:= \frac{1}{2}(u(e) + iu(ie)), & e \in E. \end{aligned}$$

Wówczas u' jest C -liniowe, a u'' jest antyliniowe. Ponadto zachodzi kanoniczny rozkład na sumę prostą

$$(2) \quad L_R(E, F) = L_C(E, F) \oplus L_{\bar{C}}(E, F).$$

Uwaga. Gdy E i F są zespolonymi przestrzeniami Banacha, wtedy przez $L_R(E, F)$, $L_C(E, F)$, $L_{\bar{C}}(E, F)$ oznaczmy przestrzenie Banacha odpowiednich odwzorowań ograniczonych, więc i ciągłych — wówczas (2) jest rozkładem na sumę prostą przestrzeni Banacha.

Dowód. Sprawdzimy tylko, że u'' jest antyliniowe. Wystarczy wykazać, że $u''(ie) = -iu''(e)$; $2u''(ie) = u(ie) + iu(ie) = u(ie) - iu(e) = -i(u(e) + iu(ie)) = -2u''(e)$. ■

Odwzorowanie holomorficzne. Niech E i F będą zespolonymi przestrzeniami Banacha. Można je traktować jako przestrzenie wektorowe nad R . Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni E oraz $u: U \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym na U . Wówczas dla każdego $x \in U$ pochodna $d_x u$ odwzorowania u w punkcie x jest ciągłym R -liniowym odwzorowaniem $E \rightarrow F$, a zatem z lematu XV.1.1 wynika, że możemy rozłożyć $d_x u$ na część C -liniową $(d_x u)'$ i część antyliniową $(d_x u)''$, mianowicie

$$d_x u = d_x u' + d_x u'' \quad \text{dla dowolnego } x \in U.$$

Ponieważ zapisujemy $du' \equiv d'u$, $du'' \equiv d''u$, więc dla dowolnego odwzorowania różniczkowalnego $u: U \rightarrow F$ mamy

$$(3) \quad d_x u = d'_x u + d''_x u,$$

gdzie $d'_x u \in L_C(E, F)$, $d''_x u \in L_{\bar{C}}(E, F)$.

U w a g a. Operator d'' nazywamy *operatorem Cauchy'ego–Riemanna*; w literaturze amerykańskiej operator Cauchy'ego–Riemanna jest oznaczany przez $\bar{\partial}$ (a operator d' przez ∂).

Możemy teraz wprowadzić podstawowe pojęcie holomorfczności.

DEFINICJA. Niech U będzie otwartym podzbiorem zespolonej przestrzeni Banacha E i niech F będzie również zespoloną przestrzenią Banacha; odwzorowanie $u: E \rightarrow F$ jest *holomorfczne*, jeśli

1° $u \in C^1(U, F)$,

2° pochodna $d_x u$ odwzorowania u jest C -liniowa dla każdego $x \in U$.

Warunek 2° oznacza, że $du = d'u$, a zatem $d''u$ — antyliniowa część du — znika, możemy więc zastąpić 2° przez

2°' $d''_x u = 0$ tożsamościowo dla $x \in U$.

Można to wyrazić krótko:

WNIOSEK XV.1.2. *Odwzorowanie $u: U \rightarrow F$ klasy C^1 jest holomorfczne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna*

$$(4) \quad d''u = 0 \text{ (lub } \bar{\partial}u = 0 \text{ w innej notacji).}$$

Przestrzeń odwzorowań holomorfcznych będziemy oznaczać przez $A(U, F)$ lub $\text{Hol}(U, F)$ lub $\mathcal{O}(U, F)$. Gdy $F = \mathbb{C}$, funkcje holomorfczne oznacza się przez $A(U)$ lub $\mathcal{O}(U)$.

Z twierdzenia o pochodnej superpozycji i z definicji wynika twierdzenie następujące:

Twierdzenie XV.1.3. 1° *Złożenie odwzorowań holomorfcznych $u \circ v$ jest odwzorowaniem holomorfcznym.*

2° *Odwzorowanie odwrotne u^{-1} do holomorfcznego dyfeomorfizmu jest odwzorowaniem holomorfcznym.*

3° *Jeżeli $F = \mathbb{C}^m$ oraz $u = (u_1, \dots, u_m)$, gdzie $u_1, \dots, u_m$ są składowymi odwzorowania u , to $u: U \rightarrow \mathbb{C}^m$ jest holomorfczne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe $u_1, \dots, u_m$ są funkcjami holomorfcznymi.*

Możemy utożsamić $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ z $\mathbb{C}^n$ za pomocą $\mathbb{R}$ -liniowego izomorfizmu $\lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$$\lambda(x, y) := x + iy, \quad \lambda^{-1}(z) := \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2}(z - \bar{z})\right),$$

gdzie $x = (x^1, \dots, x^n)$, $z = (z^1, \dots, z^n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, $i = \sqrt{-1}$.

Zdefiniujemy teraz następujące operatory różniczkowe w $\mathbb{C}^n$:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

we współrzędnych: $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right),$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

we współrzędnych: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \right).$

Natychmiast sprawdza się, że

$$(7) \quad d'u = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad d''u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}.$$

Zatem $\operatorname{Re} u_\mu$ i $\operatorname{Im} u_\mu$ są funkcjami harmonicznymi.

Otrzymujemy w ten sposób „inną” definicję holomorficzości.

STWIERDZENIE XV.1.4. *Niech U będzie otwartym podzbiorem C^n . Odwzorowanie klasy C^1 jest holomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia układ równań Cauchy'ego–Riemanna*

$$(C-R) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y}$$

lub we współrzędnych

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x^k} = -i \frac{\partial u}{\partial y^k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Rozważmy jeszcze bardziej szczególny przypadek; niech $F = C^m$. Utożsamiając R^{2m} i C^m za pomocą izoformizmu λ i zapisując $u: U \rightarrow C^m$ w postaci $u = u' + iu''$, gdzie $u'_\mu = \operatorname{Re} u_\mu$, $u''_\mu = \operatorname{Im} u_\mu$, otrzymujemy wzór (8) w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u'}{\partial x} + i \frac{\partial u''}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u'}{\partial y} + i \frac{\partial u''}{\partial y}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + i \frac{\partial u''}{\partial x} &= -i \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial u''}{\partial y}. \end{aligned}$$

Stąd porównując części urojone i rzeczywiste mamy następujący wniosek.

WNIOSEK XV.1.5 (RZECZYWISTA POSTAĆ RÓWNAŃ CAUCHY'EGO–RIEMANNA). *Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni C^n , wówczas odwzorowanie $u: U \rightarrow C^m$ klasy C^1 jest holomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy u' oraz u'' spełniają układ równań pierwszego rzędu Cauchy'ego–Riemanna (C-R)*

$$(9) \quad \frac{\partial \operatorname{Re} u}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial y}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re} u}{\partial y}$$

lub we współrzędnych

$$(9') \quad \frac{\partial u'_\mu}{\partial x^k} = \frac{\partial u''_\mu}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial u'_\nu}{\partial x^l} = -\frac{\partial u'_\nu}{\partial y^l},$$

$$k, l = 1, \dots, n; \quad \mu, \nu = 1, \dots, m.$$

Zatem

$$(10) \quad \sum \frac{\partial^2 u'_\mu}{(\partial x^k)^2} + \sum \frac{\partial^2 u'_\mu}{(\partial y^k)^2} = 0 = \sum \frac{\partial^2 u''_\mu}{(\partial x^k)^2} + \sum \frac{\partial^2 u''_\mu}{(\partial y^k)^2} = 0. \quad \blacksquare$$

Uwaga. Równania (8) i (9) nazywane są również *układami równań Cauchy'ego–Riemanna*. W przypadku gdy $m = n = 1$ znali je już d'Alembert i Gauss. (Równania (10) nazywamy *równaniami Laplace'a*.)

Niech $u \in A(U, C^m)$, $U \in C^n$. Korzystając z równań Cauchy'ego–Riemanna (9'), możemy przedstawić w następującej postaci macierz Jacobiego pochodnej du odwzorowania u :

$$\frac{\partial(u)}{\partial(x)} = d(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_1}{\partial x^n} & -\frac{\partial u''_1}{\partial x^1} & \cdots & -\frac{\partial u''_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u'_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_m}{\partial x^n} & -\frac{\partial u''_m}{\partial x^1} & \cdots & -\frac{\partial u''_m}{\partial x^n} \\ \frac{\partial u'_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_1}{\partial x^n} & \frac{\partial u'_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u'_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_m}{\partial x^n} & \frac{\partial u'_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

Gdy $m = n$, otrzymujemy jacobian

$$\frac{\partial(u'_1, \dots, u'_n, u''_1, \dots, u''_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u'_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u'_n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u'_n}{\partial x^n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial u''_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u''_1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u''_n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial u''_n}{\partial x^n} \end{vmatrix}^2 \geq 0.$$

STWIERDZENIE XV.1.6. Niech u będzie biholomorfizmem, tzn. dyfeomorfizmem holomorfizmu, $U \xrightarrow{u} V \subset C^n$. Wówczas jacobian odwzorowania u jest dodatni.

Mamy następujący wniosek:

WNIOSEK XV.1.7. Każda zespolona rozmaitość wymiaru n jest orientowalna.

Holomorfczne odwzorowania rozmaitości zespolonych. Przypomnijmy, że rozmaitość topologiczną M modelowaną na zespolonej przestrzeni Banacha nazywamy rozmaitością *holomorfczną* lub *zespoloną*, gdy istnieje holomorfczny atlas $(u_i, M_i)_{i \in I}$ rozmaitości M , gdzie każde $u_i: M_i \rightarrow E$ jest homeomorfizmem oraz dla każdego $i, k \in I$ odwzorowania

$$u_k \circ (u_i|_{M_i \cap M_k})^{-1}: u_i(M_i \cap M_k) \rightarrow u_k(M_k \cap M_i)$$

są holomorfczne. Możemy teraz rozszerzyć pojęcie odwzorowania holomorfcznego w ten sam sposób jak w przypadku odwzorowań różniczkowalnych.

DEFINICJA. Niech M będzie rozmaitością zespoloną modelowaną na przestrzeni E wyposażoną w holomorfczny atlas $\{(u_i, M_i): i \in I\}$, niech N będzie rozmaitością zespoloną modelowaną na zespolonej przestrzeni Banacha F i niech $\{(v_j, N_j): j \in J\}$ będzie holomorfcznym atlasem rozmaitości N . Odwzorowanie $f: M \rightarrow N$ jest odwzorowaniem *holomorfcznym*, jeśli dla dowolnych dwóch map $u_i, v_j, (i, j) \in I \times J$

$$f_{u_i, v_j} = v_j \circ f \circ u_i^{-1}: u_i(M_i) \rightarrow v_j(N_j)$$

jest odwzorowaniem holomorfcznym (otwartego podzbioru $u_i(M_i)$ przestrzeni E w otwarty podzbiór $v_j(N_j)$ przestrzeni F).

Uwaga. Oczywiście każda zespolona rozmaitość M jest z definicji klasy C^1 . Dokładniej, na M istnieje rzeczywista struktura różniczkowalna klasy C^1 . Aby uniknąć pomyłek, oznacza się przez $M^{\mathbb{R}}$ rozmaitość M wyposażoną w tę rzeczywistą strukturę różniczkowalną.

Zatem wnioskiem ze stwierdzenia XV.1.6 jest twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE XV.1.8. Niech M będzie rozmaitością zespoloną o zespolonym wymiarze n . Wówczas rozmaitość $M^{\mathbb{R}}$ jest rozmaitością rzeczywistą o rzeczywistym wymiarze $2n$; $M^{\mathbb{R}}$ jest orientowalna i posiada naturalną orientację.

Twierdzenie o odwzorowaniach uwikłanych. Z twierdzenia VIII.3.1 otrzymujemy następującą holomorfczną wersję twierdzenia Gravesa:

TWIERDZENIE XV.1.9. Niech E i F będą zespolonymi przestrzeniami Banacha i niech h będzie odwzorowaniem otwartego podzbioru V iloczynu $E \times F$ w F . Załóżmy, że istnieje punkt $(e_0, f_0) \in V$ taki, że $h(e_0, f_0) = 0$, i otwarte otoczenie $U \subset V$ punktu (e_0, f_0) . Załóżmy, że $h \in A(U, F)$.

Jeśli $\nabla_F h(e_0, f_0) \in L_{\mathbb{C}}(E, F)$ jest odwracalne i odwzorowanie odwrotne jest ograniczone, to istnieją $r_1, r_2 > 0$ takie, że h generuje odwzorowanie uwikłane $G: K(e_0, r_1) \rightarrow K(f_0, r_2) \subset F$. Odwzorowanie G jest holomorfczne, a jego pochodna dana jest wzorem

$$(*) \quad \nabla G(e) = -(\nabla_F h(e, f))^{-1} \circ \nabla_E h(e, f).$$