

gdzieś pomiędzy III wiekiem p.n.e. a II wiekiem n.e. W rozdziale siódmym „Zbyt dużo i nie wystarczająco” po raz pierwszy wprowadzono koncepcję wyznacznika. Dopiero 1000 lat później pojawiły się publikacje z jego definicją:

- 1683 rok – Kowa Seki, jeszcze błędna, poprawiona w 1710 roku,
- 1693 rok – Gottfried Leibnitz.

Były to prace niezależne. W 1750 roku Gabriel Cramer publikuje wzory dające pełny algorytm rozwiązania układów równań liniowych.

Dzisiaj bez macierzy nie istniałaby np. współczesna grafika 3D. Macierze są wymarzoną narzędziem do przeprowadzania obliczeń i rozwiązywania równań. Łatwość ich implementacji w komputerowym świecie i zoptymalizowane szybkościowo algorytmy operacji na nich powodują, że nie możemy się bez nich obejść.

2. Macierze

2.1. Wiadomości wstępne o macierzach

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Prostokątną tablicę

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

utworzoną z liczb rzeczywistych (zespółonych) a_{ij} dla $i = 1, \dots, m$,

$j = 1, \dots, n$ nazywamy **rzeczywistą (zespółoną) macierzą prostokątną** o wymiarze $m \times n$. Elementy a_{ij} nazywamy wyrazami macierzy. Rzędy pionowe nazywamy kolumnami, zaś poziome – wierszami tej macierzy. Symbol a_{ij} jest to element stojący na przecięciu i -tego wiersza oraz j -tej kolumny. Macierze oznaczamy wielkimi literami alfabetu: $A, B, C, \dots$.

Zbiór wszystkich macierzy rzeczywistych (zespolonych) $m \times n$ (m -wierszy, n -kolumn) będziemy oznaczali $M_{m \times n}(R)$ ($M_{m \times n}(C)$).

Rodzaje macierzy:

1. **macierz kwadratowa** stopnia n – macierz, w której ilość wierszy równa jest ilości kolumn, czyli $m = n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Elementy a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$, tzn. $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ tworzą główną przekątną macierzy. Sumę tych wyrazów czyli $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ nazywamy **śladem macierzy** i oznaczamy $tr(A)$.

2. **macierz trójkątna dolna (górną)** – macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$, w której wszystkie elementy leżące nad (pod) główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. **macierz diagonalna** – macierz kwadratowa stopnia n , w której wszystkie wyrazy znajdujące się poza główną przekątną są równe 0.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O macierzy diagonalnej można również mówić dla macierzy prostokątnych.

4. **macierz jednostkowa** – macierz diagonalna stopnia n , w której wszystkie elementy na głównej przekątnej są równe 1.

Oznaczamy ją I .

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

5. **macierz zerowa** – macierz wymiaru $m \times n$, w której wszystkie elementy równe są 0. Oznaczamy ją O .

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Działania na macierzach

Dwie macierze $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m' \times n'}$ są równe, gdy mają ten sam wymiar, tzn. $m = m'$ i $n = n'$ oraz elementy obu macierzy znajdujące się na tych samych miejscach są sobie równe, czyli $a_{ij} = b_{ij}$ dla dowolnych $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

W zbiorze macierzy określamy podstawowe działania: transponowanie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie macierzy przez liczbę rzeczywistą α , mnożenie macierzy. Zapamiętajmy, nie istnieje dzielenie macierzy.

• Transponowanie macierzy

Macierzą transponowaną do macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ określoną wzorem $b_{ij} = a_{ji}$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Piszemy wówczas

$$B = A^T.$$

Transponowanie macierzy polega zatem na zamianie wierszy z kolumnami w danej macierzy.

PRZYKŁAD 2.2.1. Dla danej macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ mamy

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

• **Dodawanie i odejmowanie macierzy**

Sumą (różnicą) macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, której elementy określone są jako $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ dla $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. A więc

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} = A \pm B.$$

Dodawać i odejmować możemy jedynie macierze tych samych wymiarów.

PRZYKŁAD 2.2.2. Dla danych macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ oraz

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ mamy}$$

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - (-2) & 5 - 0 & 1 - 3 \\ -2 - 4 & 3 - (-1) & 0 - 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

- **Mnożenie macierzy przez liczbę rzeczywistą α**

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ przez liczbę $\alpha \in R$ nazywamy macierz $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, której elementy określamy jako $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ dla $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Mamy zatem

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha \cdot A.$$

PRZYKŁAD 2.2.3. Dla danych macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ oraz

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ obliczyć } 2A - 4B.$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} 2A - 4B &= 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 12 & -4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 18 \\ -16 & 6 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

- **Mnożenie macierzy**

Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times k}$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}]_{m \times k}$, której elementy określa wzór

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

dla $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k$.

Iloczyn macierzy $A \cdot B$ jest wykonalny, gdy ilość kolumn macierzy A jest taka sama jak ilość wierszy macierzy B .

PRZYKŁAD 2.2.4. Dla danych $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

obliczyć iloczyn $A \cdot B$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1+6 & -1-4 & 2+2 & 0+2 \\ -1+9 & 1-6 & -2+3 & 0+3 \\ 2-3 & -2+2 & 4-1 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 4 & 2 \\ 8 & -5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Zauważmy, że iloczyn $B \cdot A$ jest niewykonalny, gdyż w macierzy B mamy 4 kolumny, zaś w macierzy A wierszy jest 3. Na tym przykładzie widzimy również brak przemienności mnożenia macierzy. Iloczyn macierzy nie jest przemienny również dla macierzy kwadratowych.

PRZYKŁAD 2.2.5. Dla danych macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ oraz

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ obliczyć iloczyny } A \cdot B \text{ oraz } B \cdot A.$$

Rozwiązanie

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Widać, że $A \cdot B \neq B \cdot A$.

■

Podstawowe własności działań na macierzach:

Założmy, że macierze A, B, C są takie, aby działania na nich przeprowadzane były wykonalne. Wówczas zachodzi:

1. Przemienność dodawania:

$$A + B = B + A.$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne. Nie wyklucza to istnienia macierzy A, B takich, że $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Łączność dodawania i mnożenia:

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

3. Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A,$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

4. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$ dla $\alpha \in R$.

5. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ dla $\alpha \in R$.

6. $A \cdot I = I \cdot A = A$.

7. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

8. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

9. $(A^T)^T = A$.

PRZYKŁAD 2.2.6. Dla danych macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ obliczyć $A \cdot C^T - 2B$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 A \cdot C^T - 2B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} - \\
 &\quad - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 7 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 14 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

■

PRZYKŁAD 2.2.7. Dla danych macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

rozwiązać równanie macierzowe $2A^T + 3X = B$.

Rozwiązanie

- ✓ Przekształcamy równanie $2A^T + 3X = B$ i wyliczamy macierz niewiadomą X :

$$3X = B - 2A^T$$

Dzieląc obustronnie przez 3 mamy:

$$X = \frac{1}{3} \cdot (B - 2A^T).$$

- ✓ Wstawiamy odpowiednie macierze do równania:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Szukaną macierzą jest $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

■

PRZYKŁAD 2.2.8. Znaleźć macierz X spełniającą równanie

$$3X^T - 2X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

✓ Przewidujemy, że macierz X będzie miała postać

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad a, b, c, d \in R, \text{ gdyż macierz po prawej stronie równania jest wymiaru } 2 \times 2. \text{ Jednym z warunków równości macierzy jest zgodność ich wymiarów. Następnie mamy, że } X^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Wstawiając do równania otrzymujemy:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a & 3c \\ 3b & 3d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a - 2a & 3c - 2b \\ 3b - 2c & 3d - 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 3c - 2b \\ 3b - 2c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ✓ Aby macierze były równe, odpowiadające sobie elementy muszą być równe. Powstaje więc układ równań:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 3c - 2b = 1 \\ 3b - 2c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0,4 \\ c = 0,6 \\ d = 1 \end{cases}$.

✓ Szukana macierz ma postać $X = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix}$.

■

ZADANIA

2.1. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Wyznaczyć macierze: $2A + C$, $A - 3C$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C^T$, $A^T \cdot C$.

2.2. Niech będą dane macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Obliczyć $2A - 3C^T$.
- Rozwiązać równanie macierzowe $3X + A^T = 2C$.
- Obliczyć iloczyny macierzy $A \cdot C$, $C \cdot A$, $A \cdot B$, $C^T \cdot C$, $C \cdot C^T$.

2.3. Znaleźć macierz $AB - BA$ dla $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.