

Rozdział 4.

Rozwiązania

Zadanie 1. (4 pkt)

Niech szukane równanie funkcji f ma postać $f(x) = ax + b$. Z warunku prostopadłości prostych, danych równaniami kierunkowymi, mamy: $a \cdot \frac{3}{2} = -1$, stąd $a = -\frac{2}{3}$. Wzór szukanej funkcji ma więc postać $f(x) = -\frac{2}{3}x + b$. Ponieważ punkt A należy do wykresu tej funkcji, więc $-2 = -\frac{2}{3}(-3) + b$, stąd $b = -4$. Miejsc zerowe funkcji f obliczamy z równania $0 = -\frac{2}{3}x - 4$, otrzymując $x = 6$.

Odpowiedź: a. $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$,

b. $x = -6$.

Zadanie 2. (3 pkt)

Oznaczmy szukany punkt przez $B = (x_0, y_0)$, wobec tego $\overrightarrow{AB} = [x_0 - 1, y_0 + 2]$ i z warunku równości wektorów otrzymujemy równania $x_0 - 1 = -3, y_0 + 2 = 4$, stąd $x_0 = -2, y_0 = 2$, czyli $B = (-2, 2)$. Współrzędne wektora $\vec{v}$ oraz jego długość obliczamy bezpośrednio ze wzorów:

$$\vec{v} = -2 \cdot \overrightarrow{AB} = -2[-3, 4] = [6, -8],$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Odpowiedź: c. $B = (-2, 2)$

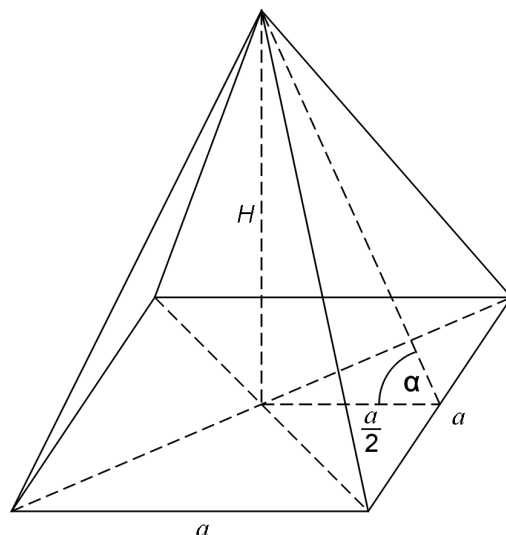
d. $\vec{v} = [6, -8], |\vec{v}| = 10$.

Zadanie 10. (5 pkt)

Objętość stożka o promieniu podstawy r oraz o wysokości h wynosi

$$V_s = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot \frac{18}{\pi} = 96 \text{ dm}^3.$$

Tyle też wynosi objętość ostrosłupa. Oznaczmy jego wysokość przez H i obliczmy ją za pomocą tangensa kąta nachylenia ściany bocznej α oraz krawędzi podstawy $a = 4\sqrt{3}$.



Mamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{1}{2}a}$, czyli $H = \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$.

Stąd objętość ostrosłupa na podstawie wzoru wynosi

$$V_o = \frac{1}{3}a^2 H = \frac{1}{3}16 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha = 32\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Z drugiej strony objętość ta wynosi 96 dm^3 , czyli

$$96 = 32\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha,$$

stąd $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$. Ostatecznie $\alpha = 60^\circ$.

Odpowiedź: Kąt nachylenia ściany bocznej wynosi 60° .

Zadania

Zadanie 11. (4 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $mx^2 - 3(m+1)x + m = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Model odpowiedzi i schemat punktowania

Numer czynności	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów	Modelowy wynik etapu (czynności)
11.3	Wyznaczenie wartości spełniających warunek $\Delta < 0$	1 pkt	$m \in \left(-3, -\frac{3}{5}\right)$
11.4	Podanie odpowiedzi	1 pkt	$m \in \left(-3, -\frac{3}{5}\right)$

Numer czynności	Opis wykonywanej czynności	Liczba punktów	Modelowy wynik etapu (czynności)
15.2	Wyznaczenie pola powierzchni całkowitej walca jako funkcji zmiennej r	1 pkt	$P(r) = \frac{2\pi r^3 + 500\pi}{r}$
.			
.			
.			
15.4	Wyznaczenie $P'(r)$	1 pkt	$P'(r) = \frac{4\pi r^3 - 500\pi}{r^2}$

Rozdział 5.

Zadania

Zadanie 13. (4 pkt) _____

Wyznacz te wartości parametrów a oraz b , przy których funkcja $g : R \rightarrow R$, określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2, \\ b & \text{dla } x = 2, \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x = 2$.