

ROZDZIAŁ 6

RÓWNANIA WIELOMIANOWE



6 Równania wielomianowe

Równaniem wielomianowym nazywamy równanie postaci

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Innymi słowy, równanie wielomianowe to nic innego jak suma jednomianów przyrównana do 0. Równanie wielomianowe czasem bardzo trudno jest obliczyć i trzeba użyć do niego wielu metod. W tym miejscu chciałabym wymienić kilka metod rozwiązywania równań wielomianowych m z czego pierwsze 3 obowiązują uczniów po gimnazjum, natomiast ostatnia uczniów po podstawówce:

- wyciąganie czynnika przed nawias
- metoda grupowania
- dzielenie wielomianów

Zacznijmy po kolei omawiać metody. Przyłóż się do tego tematu bo dotychczas zadanie z równania wielomianowego było zawsze jako jedno z zadań otwartych na maturze !

6.1 Metoda wyłączania czynnika przed nawias

Metodę wyłączania czynnika przed nawias wykorzystujemy, gdy mamy do czynienia z wielomianem, w którym każdy element ma x. Wówczas możemy go wyłączyć przed nawias i przedstawić wielomian jako iloczyn dwóch elementów: wyłączonego x i nawiasu. Wtedy każdy z elementów możemy przyrównać do 0 tworząc dwa osobne równania. Pokażę to na przykładzie.

$$x^3 + 2x^2 + x = 0$$

Jak widzimy możemy tutaj wyłączyć x przed nawias. Otrzymamy wówczas:

$$x(x^2 + 2x + 1) = 0$$

Równania wielomianowe

Mnożenie dwóch elementów jest równe 0 wtedy i tylko wtedy kiedy któryś z elementów przez które mnożymy jest zerem, czyli:

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

W przypadku pierwszego równania mamy jasność, drugie musimy rozwiązać korzystając z delty.

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Mamy zatem jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1$$

Nasze równanie wielomianowe ma zatem 2 rozwiązania: $x=0$ oraz $x=-1$.

Spróbujmy na jeszcze jednym przykładzie:

$$x^5 + 5x^4 + 6x^3 = 0$$

W tym przypadku możemy wyłączyć wyższą potęgę x przed nawias, bo możemy wyłączyć aż x^3 .

$$x^3(x^2 + 5x + 6) = 0$$

Otrzymujemy zatem dwa osobne równania:

$$x^3 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

Zacznijmy od pierwszego równania :

$$x^3 = 0 \quad \sqrt[3]{}$$

$$x = 0$$

Drugie równanie ponownie wymaga obliczenia delty:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

Mamy tu zatem 2 rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-5 + 1}{2 \cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3$$

Nasze równanie ma zatem aż trzy rozwiązania: $x=0$, $x=-2$, $x=-3$.

6.2 Metoda grupowania

Metoda grupowania jest troszkę trudniejsza, lecz po zrozumieniu jej zasad działa bardzo intuicyjnie. Na maturze podstawowej korzystamy z niej kiedy mamy parzystą ilość elementów w sumie i nie możemy nic wyłączyć przed nawias. Aby rozwiązać równanie metodą grupowania należy podzielić naszą sumę na 2 części i z każdej z nich wyciągnąć maksymalnie dużo przed nawias tak, aby w nawiasach zostało to samo. Najlepiej wytłumaczyć daną metodę na przykładzie:

Zadanie (matura maj 2010, zadanie 27) :

$$x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$$

Dzielimy nasze równanie na 2 grupy:

$$\underline{x^3 - 7x^2} - \underline{4x + 28} = 0$$

Wyciągamy maksymalnie dużo przed nawias z grupy pierwszej oraz drugiej:

$$x^2(x - 7) - 4(x - 7) = 0$$

Zauważmy, że z drugiej grupy przed nawias wyciągamy -4, zatem aby iloczyn był dodatni i wynosił 28, musimy w nawiasie mieć liczbę ujemną ponieważ tylko $- \cdot - = +$. Jak widzimy teraz w nawiasach występuje dokładnie to samo. Spróbujemy zatem wyciągnąć nasz nawias przed nawias.

$$x^2 \underline{(x - 7)} - \underline{4(x - 7)} = 0$$

Zauważmy, że jak wyciągniemy $x-7$ z pierwszego elementu to pozostanie nam x^2 , natomiast jak wyciągniemy to z drugiego elementu zostanie -4 . Otrzymujemy zatem:

Równania wielomianowe

$$(x - 7)(x^2 - 4) = 0$$

Dzielimy równanie na 2 osobne (podobna sytuacja jak w metodzie wyciągania przed nawias):

$$x - 7 = 0 \qquad x^2 - 4 = 0$$

Z pierwszego równania wychodzi nam, że $x=7$. Z drugiego równania:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

Musimy się zastanowić co podniesione do kwadratu da nam 4, zatem

$$x = 2 \text{ oraz } x = -2.$$

Nasze równanie ma zatem 3 rozwiązania: $x=7$, $x=-2$ oraz $x=2$.

Zróbmy jeszcze jeden przykład. Zanim opanujecie tą metodę trzeba będzie zrobić wiele przykładów. Pamiętajcie, że jeżeli w nawiasach nie pojawia wam się to samo, to coś jest źle ;)

Zadanie (matura sierpień 2010, zadanie 27) .

Rozwiąż równanie:

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$\underline{x^3 - 3x^2} + \underline{2x - 6} = 0$$

$$x^2 \underline{(x - 3)} + 2 \underline{(x - 3)} = 0$$

$$(x - 3)(x^2 + 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \qquad x^2 + 2 = 0$$

$$x = 3 \qquad x^2 = -2$$

sprzeczne

Możemy zastanawiać się, czy cokolwiek podniesione do kwadratu da nam -2, ale to równanie sprzeczne! Nigdy nie otrzymamy liczby ujemnej w wyniku potęgi parzystego stopnia !

Zatem tutaj nasze równanie ma tylko jedno rozwiązanie: $x=3$.

Tu w tym miejscu umieścimy równania wielomianowe dla osób, które są po gimnazjum. Oczywiście obowiązują również one osoby po

174

podstawówce, z tym, że niestety, te drugie osoby mają trochę więcej materiału na podstawie.

6.3 ZADANIA: RÓWNANIA WIELOMIANOWE

Zadanie 1. (matura czerwiec 2015, zadanie 27).

Rozwiąż równanie:

$$x(x^2 - 2x + 3) = 0$$

Zadanie 2. (matura maj 2016, zadanie 28).

Rozwiąż równanie:

$$(4 - x)(x^2 + 2x - 15) = 0$$

Zadanie 3. (matura sierpień 2017, zadanie 27).

Rozwiąż równanie:

$$(x^2 - 6)(3x + 2) = 0$$

Zadanie 4. (matura próbna grudzień 2014, zadanie 3).

Rozwiązaniami równania:

$$(x^3 - 8)(x - 5)(2x + 1) = 0$$

są liczby:

$$A. -8; -5; 1 \quad B. -1; 5; 8 \quad C. -\frac{1}{2}; 2; 5 \quad D. -\frac{1}{2}; 2; 8$$

Zadanie 5.

Rozwiąż równanie:

$$(x^2 - 5x + 6)(x - 1)(x + 3) = 0$$

Zadanie 6.

Rozwiąż równanie:

$$(x - 8)(x^2 - 4)(x^3 - 8) = 0$$

Zadanie 7. (matura maj 2019, zadanie 26)

Rozwiąż równanie:

$$x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = 0$$

Zadanie 8. (matura czerwiec 2020, zadanie 27).

Rozwiąż równanie:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2x) = 0$$

6.4 Rozwiązania

Zadanie 1.

$$x(x^2 - 2x + 3) = 0$$

Rozpatrujemy 2 osobne równania:

$$x = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

W pierwszym mamy jasność, zabieramy się za drugie:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

$$\Delta < 0$$

Brak rozwiązań z równania kwadratowego, zatem jedynym rozwiązaniem jest $x=0$.

Zadanie 2.

Ponownie rozpatrujemy 2 przypadki:

$$4 - x = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Z pierwszego:

$$4 - x = 0$$

$$-x = -4 \quad \cdot (-1)$$

$$x = 4$$

Z drugiego:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{-2 + 8}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-2 - 8}{2 \cdot 1} = -\frac{10}{2} = -5$$

Mamy zatem 3 rozwiązania:

Odpowiedź: $x=4$, $x=3$ oraz $x=-5$.

Zadanie 3.

Rozpatrujemy 2 równania:

$$x^2 - 6 = 0 \quad 3x + 2 = 0$$

Pierwsze równanie:

$$x^2 = 6$$

Co podniesione do kwadratu da nam 6?

$$x = \sqrt{6} \quad i \quad x = -\sqrt{6}$$

Drugie równanie:

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2 \quad |:3$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Równania wielomianowe

Mamy zatem 3 rozwiązania:

Odpowiedź: $x = \sqrt{6}$, $x = -\sqrt{6}$, $x = -\frac{2}{3}$.

Zadanie 4.

Rozpatrujemy 3 równania:

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1 \quad |:2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: C.

Zadanie 5.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x - 1 = 0 \quad x + 3 = 0$$

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-5) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2) $x - 1 = 0$

$$x = 1$$

3) $x + 3 = 0$

$$x = -3$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są $x=2$, $x=3$, $x=1$ oraz $x=-3$.

Zadanie 6.

Rozpatrujemy trzy równania:

$$1) x - 8 = 0$$

$$2) x^2 - 4 = 0$$

$$3) x^3 - 8 = 0$$

$$1. x - 8 = 0$$

$$x = 8$$

$$2. x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ lub } x = -2$$

$$3. x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są $x=2$, $x=-2$.

Zadanie 7.

Łączymy po 2 elementy i z nich wyciągamy maksymalnie dużo przed nawias:

$$x^2(x - 5) - 9(x - 5) = 0$$

Wyciągamy $(x-5)$ przed całość otrzymując:

$$(x - 5)(x^2 - 9) = 0$$

Teraz rozpatrujemy 2 równania:

$$1) x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$2) x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ lub } x = -3$$

Odpowiedź: Mamy 3 rozwiązania: $x=5$, $x=3$ i $x=-3$.

Zadanie 8.

Rozpatrujemy dwa przypadki:

$$1) \quad x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ lub } x = -1$$

$$2) \quad x^2 - 2x = 0$$

Wyciągamy x przed nawias lub rozwiązujemy deltą. Ja wyłączę x przed nawias.

$$x(x - 2) = 0$$

Zatem:

$$x = 0 \text{ lub } x - 2 = 0$$

Naszymi rozwiązaniami są zatem:

Odpowiedź: $x=1$, $x=-1$, $x=0$, $x=2$.

6.5 Dzielenie wielomianów

Dzielenie wielomianów wygląda bardzo podobnie jak dzielenie pisemne liczb. Wykonujemy cały czas ten sam schemat aż do otrzymania reszty lub też do braku reszty.

Jeżeli już wcześniej miałeś „pod górkę” z dzieleniem pisemnym przedstawię tutaj jeszcze jedną alternatywną metodę dzielenia wielomianów, czyli schemat Hornera. Jest on wyjątkowo korzystny dla osób z dysleksją lub dysgrafią. Zacznijmy jednak od dzielenia pisemnego.

6.6 Dzielenie pisemne wielomianów

W przypadku dzielenia pisemnego liczb schemat wyglądał następująco:

Liczbę 24 dzielimy przez 3 i otrzymujemy 8, następnie 8 mnożymy przez 3 i spisujemy wynik poniżej ze zmienionym znakiem!

$$\begin{array}{r}
 81 \\
 243 : 3 \\
 \underline{-24} \\
 = 3 \\
 \underline{-3} \\
 =
 \end{array}$$

spisujemy następną liczbę i tym razem ją dzielimy przez 3, otrzymujemy 1, które mnożymy przez 3, wynik spisujemy poniżej ze zmienionym znakiem

Otrzymujemy naszą różnicę, bo nie mamy już czego spisywać, tutaj akurat różnica wynosi 0.

Rysunek 6.1 Schemat dzielenia pisemnego

Dzielenie pisemne liczb na egzaminie maturalnym nie ma żadnego sensu, gdyż możemy mieć na nim kalkulator, natomiast identyczny schemat wykorzystamy w dzieleniu wielomianów. Spróbujemy wytłumaczyć to na przykładzie dzielenia wielomianu: $x^3 - 3x^2 - 3x - 35$ przez wielomian $x - 5$.

1) x^3 dzielimy przez x i po znaku = piszemy wynik dzielenia, czyli x^2

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 - 3x - 35) : (x - 5) = x^2 \\
 \underline{-x^3 + 5x^2} \\
 = 2x^2 - 3x
 \end{array}$$

2) wynik, czyli x^2 , mnożymy przez cały dzielnik, czyli cały nawias, następnie wynik tego działania piszemy pod $x^3 - 3x^2$ ze zmienionym znakiem

3) dodajemy, spisujemy następny element i dzielimy ponownie

Rysunek 6.2 Schemat dzielenia pisemnego

4) dzielimy $2x^2$ przez x i wynik, czyli $2x$ piszemy po znaku $=$

5) $2x$ mnożymy przez cały dzielnik, czyli nawias i wynik spisujemy pod $2x^2 - 3x$ ze zmienionym znakiem

6) dodajemy i spisujemy kolejny element

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 3x - 35) : (x - 5) = x^2 + 2x \\ -x^3 + 5x^2 \\ \hline = 2x^2 - 3x \\ -2x^2 + 10x \\ \hline = 7x - 35 \end{array}$$

Rysunek 6.3 Schemat dzielenia pisemnego

7) dzielimy $7x$ przez x , otrzymujemy 7 i piszemy je po znaku $=$

8) mnożymy 7 przez nawias i spisujemy wynik poniżej $7x - 35$ ze zmienionym znakiem

9) dodajemy, nie otrzymujemy akurat tutaj żadnej reszty

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 3x - 35) : (x - 5) = x^2 + 2x + 7 \\ -x^3 + 5x^2 \\ \hline = 2x^2 - 3x \\ -2x^2 + 10x \\ \hline = 7x - 35 \\ -7x + 35 \\ \hline = = \end{array}$$

Rysunek 6.4 Schemat dzielenia pisemnego

W tym przypadku nie wyszła nam żadna reszta z dzielenia, zatem możemy powiedzieć, że :

$$(x^3 - 3x^2 - 3x - 35) : (x - 5) = x^2 + 2x + 7$$

Dla pewności możemy zrobić sprawdzenie mnożąc nasz wynik z dzielenia przez dzielnik, czyli:

$$\begin{aligned} (x - 5)(x^2 + 2x + 7) &= x^3 + 2x^2 + 7x - 5x^2 - 10x - 35 = \\ &= x^3 - 3x^2 - 3x - 35 \end{aligned}$$

Wyszedł nam dokładnie ten sam wielomian, którego dzieliliśmy, zatem rozwiązanie jest poprawne.

Spróbujmy inny przykład zrobić. Tym razem podzielimy wielomian: $w(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 16$ przez wielomian: $x + 4$.

1) dzielimy x^3 przez x i otrzymujemy x^2

$$\begin{array}{r} (x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4) = x^2 \\ -x^3 - 4x^2 \\ \hline = 3x^2 + 7x \end{array}$$

3) dodajemy i spisujemy następny element

mnożymy x^2 przez nasz dzielnik, czyli cały nawias, następnie spisujemy wynik ze zmienionym znakiem poniżej $x^3 + 7x^2$

Rysunek 6.5 Schemat dzielenia pisemnego

4) $3x^2$ dzielimy przez x i zapisujemy wynik, czyli $3x$. Następnie mnożymy $3x$ przez nawias a wynik zapisujemy poniżej $3x^2 + 7x$ ze zmienionym znakiem

$$\begin{array}{r} (x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4) = x^2 + 3x \\ -x^3 - 4x^2 \\ \hline = 3x^2 + 7x \\ -3x^2 - 12 \\ \hline = -5x - 16 \end{array}$$

5) dodajemy i spisujemy następny element

Rysunek 6.6 Schemat dzielenia pisemnego

6) $-5x$ dzielimy przez x i zapisujemy wynik, czyli -5 . Następnie mnożymy -5 przez nawias i wynik spisujemy poniżej $-5x - 16$

$$\begin{array}{r} (x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4) = x^2 + 3x - 5 \\ -x^3 - 4x^2 \\ \hline = 3x^2 + 7x \\ -3x^2 - 12 \\ \hline = -5x - 16 \\ 5x + 20 \\ \hline = 4 \end{array}$$

7) dodajemy, otrzymujemy resztę, która w tym przypadku wynosi 4.

Rysunek 6.7 Schemat dzielenia pisemnego

Możemy zatem powiedzieć, że wielomian $w(x)$ dzielony przez dwumian $(x+4)$ daje resztę 4. Skoro dzielenie dało nam resztę, to oznacza, podobnie jak w liczbach, że wielomian niestety nie jest podzielny przez $(x+4)$. Wielomian $w(x)$ możemy zapisać jako:

$$x^3 + 7x^2 + 7x - 16 = (x - 4)(x^2 + 3x - 5) + 4$$

Oprócz mnożenia wyniku, który nam powstał i dzielnika, musimy pamiętać o reszcie która pozostała. Zaznaczona została ona w naszym wielomianie na żółto.

6.7 Pierwiastek całkowity wielomianu

W przypadku wielomianów, których wszystkie współczynniki znajdujące się przy odpowiednich potęgach x , mamy takie twierdzenie, które mówi nam o tym, że pierwiastkiem całkowitym wielomianu jest dzielnik wyrazu wolnego wielomianu. Liczba będzie wielomianem, gdy podstawiając ją pod x do wzoru wielomianu w wyniku otrzymamy 0.

Weźmy przykład: wielomian: $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Szukamy dzielników wyrazu wolnego, czyli w tym przypadku -1. Pamiętajmy, że interesują nas dzielniki całkowite, więc uwzględniamy zarówno dzielniki ujemne jak i dodatnie. Oznaczmy je jako p . Jedynym dzielnikiem -1 jest 1 i -1 zatem $p \in \{\pm 1\}$.

Sprawdźmy zatem, czy wielomian od -1 lub 1 jest równy 0.

$$\begin{aligned} W(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1 = -1 - 3 \cdot 1 - 3 - 1 \\ &= -1 - 3 - 3 - 1 = -8 \neq 0 \end{aligned}$$

Sprawdzamy zatem nasz drugi możliwy pierwiastek, czyli 1.

$$W(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

Zatem możemy powiedzieć, że 1 jest pierwiastkiem wielomianu a co za tym idzie, nasz wielomian $W(x)$ będzie podzielny przez $x-a$, gdzie a jest pierwiastkiem wielomianu, czyli $x-1$. Wykonujemy dzielenie pisemne.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 = -2x^2 + 3x \\
 \underline{2x^2 - 2x} \\
 = x - 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 = =
 \end{array}$$

Wynikiem dzielenia jest kolejny wielomian, tutaj akurat trójmian kwadratowy. Aby obliczyć jego pierwiastki liczymy deltę.

$$6.7.1.1.1 \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Mamy zatem jeden pierwiastek:

$$x_0 = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

Nasz wielomian ma zatem 1 pierwiastek: $x=1$.

Weźmy inny przykład wielomianu i spróbujmy znaleźć jego pierwiastek.

$$W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 3$$

$$p \in \{\pm 1, \pm 3\}$$

$$W(1) = 2 * 1^3 + 4 * 1^2 - 3 - 3 = 2 + 4 - 3 - 3 = 0$$

Ponownie dzielnikiem wielomianu okazuje się $x=1$, zatem nasz wielomian musi być podzielny przez $x-1$. Wykonujemy dzielenie jak w poprzednich tematach i otrzymujemy trójmian kwadratowy. Liczymy zatem deltę, miejsca zerowe i koniec zadania. Spróbuj dokończyć je sam.

6.8 Równania wymierne

Równania wymierne to równania, w których w mianowniku występuje x . Przykładami równań wymiernych mogą być: $\frac{2}{x} - 3 = 9$ lub $\frac{x-3}{x+2} = 6$ itd.

Równania wielomianowe

Zaczynając obliczać rozwiązanie takiego równania, należy zacząć od wyznaczenia dziedziny, czyli wyznaczenia dla jakich x równanie ma sens. Pewnie wiele razy słyszeliście wierszyk, którego na potrzeby szkoły i tej książki lekko ocenzuruje:

Pamiętaj kolego, nigdy nie dziel przez zero !!!

Kreska ułamkowa to inaczej znak dzielenia, zatem możemy powiedzieć, że to co jest w mianowniku odpowiada temu, przez co dzielimy. Zatem zawsze chcąc obliczać równanie wymierne zaczynamy od ustalenia dziedziny czyli napisania $\text{mianownik} \neq 0$. Takie równanie, mimo że znak $=$ jest przekreślony liczymy dokładnie tak samo jak każde inne, czyli doprowadzamy do postaci $x \neq \dots$. Przeanalizujmy ten krok na jakimś przykładzie. Załóżmy, że mamy równanie:

$$\frac{x-3}{x+2} = 3$$

Wiemy, że nasz mianownik nie może się równać 0, zatem otrzymujemy:

$$x+2 \neq 0$$

Przerzucamy 2 na drugą stronę ze zmienionym znakiem i otrzymujemy:

$$x \neq -2.$$

Zatem można powiedzieć, że naszą dziedziną jest dowolny x oprócz $x=-2$. Możemy też zapisać $x \in R \setminus \{-2\}$.

Najszybszą metodą rozwiązywania równań wymiernych jest tzw. metoda „na krzyż”. Załóżmy, że mamy rozwiązać równanie podane powyżej.

Wówczas warto zapisać je sobie w nieco inny sposób tzn.: $\frac{x-3}{x+2} = \frac{3}{1}$.

Mnożąc dane równanie na krzyż otrzymamy :

$$(x-3) \cdot 1 = (x+2) \cdot 3$$

Wykonujemy działania i wyliczamy x .

$$x-3 = 3x+6$$

$$x-3x = 6+3$$

$$-2x = 9 \quad \backslash : (-2)$$

$$x = -\frac{9}{2} \text{ lub jak kto woli } x = -4,5.$$

Rozwiązanie jest zgodne z dziedziną, ponieważ z niej wynika, że x nie mógł być równy tylko -2 , zatem to koniec naszego równania.

Zadanie (matura sierpień 2012, zadanie 11) .

$$\text{Równanie } \frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0 \text{ ma}$$

- A. Dokładnie jedno rozwiązanie
- B. Dokładnie dwa rozwiązania
- C. Dokładnie trzy rozwiązania
- D. Dokładnie cztery rozwiązania

Tradycyjnie zaczynamy od dziedziny:

$$(x - 3)(x + 2) \neq 0$$

$$x - 3 \neq 0 \text{ oraz } x + 2 \neq 0$$

$$x \neq 3 \text{ oraz } x \neq -2$$

Zatem naszą dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem $x = 3$ i $x = -2$, możemy to zapisać jako $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$. Przechodzimy do naszego równania:

$$\frac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 3)(x + 2)} = 0 \setminus \cdot (x - 3)(x + 2)$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \text{ lub } x - 2 = 0$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 2$$

Mamy zatem 2 rozwiązania i oba są zgodne z dziedziną funkcji.

Odpowiedź: B.

6.9 ZADANIA: RÓWNANIA WYMIERNE

Zadanie 1. (matura sierpień 2014, zadanie 6).

Rozwiązaniem równania: $\frac{x-5}{7-x} = \frac{1}{3}$ jest liczba:

- A. -11 B. $\frac{11}{2}$ C. $\frac{2}{11}$ D. 11

Zadanie 2. (matura maj 2015, zadanie 7)

Rozwiązaniem równania: $\frac{2x-4}{3-x} = \frac{4}{3}$ jest liczba :

- A. $x = 0$ B. $x = \frac{12}{5}$ C. $x = 2$ D. $x = \frac{25}{11}$

Zadanie 3. (matura maj 2015, zadanie 7).

Równanie: $\frac{x-1}{x+1} = x - 1$

- A. Ma dokładnie jedno rozwiązanie $x=1$
- B. Ma dokładnie jedno rozwiązanie $x=0$
- C. Ma dokładnie jedno rozwiązanie $x=-1$
- D. Ma dokładnie dwa rozwiązania $x=0, x=1$

Zadanie 4.

Rozwiązaniem równania: $\frac{x-7}{x} = 5$, gdzie $x \neq 0$, jest liczba należąca do przedziału :

- A. $(-\infty, -2)$ B. $< -2, -1)$ C. $< -1, 0)$ D. $(0, \infty)$

Zadanie 5. (matura sierpień 2015, zadanie 26).

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$, gdzie $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

6.10 SPRAWDŹ SIĘ! ZESKANUJ KOD I ZRÓB QUIZZ!



6.11 Rozwiązania

Zadanie 1.

$$\frac{x-5}{7-x} = \frac{1}{3}$$

$$3(x-5) = 1(7-x)$$

$$3x - 15 = 7 - x$$

$$4x = 22 \quad |:4$$

$$x = \frac{22}{4}$$

$$x = \frac{11}{2}$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 2.

$$\frac{2x-4}{3-x} = \frac{4}{3}$$

$$3(2x-4) = 4(3-x)$$

$$6x - 12 = 12 - 4x$$

$$6x + 4x = 12 + 12$$

$$10x = 24$$

$$x = \frac{24}{10}$$

$$x = \frac{12}{5}$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 3.

$$\frac{x-1}{x+1} = x-1$$

$$D: x+1 \neq 0,$$

$$x \neq -1$$

$$x-1 = (x+1)(x-1)$$

$$x-1 = x^2-1$$

$$x-1-x^2+1=0$$

$$-x^2+x=0$$

$$x(-x+1)=0$$

$$x=0 \text{ lub } -x+1=0$$

$$x=1$$

Z dziedziny wynikało, że $x \neq -1$ zatem oba rozwiązania które nam wyszły są poprawne.

Odpowiedź: D

Zadanie 4.

$$D: x \neq 0$$

$$\frac{x-7}{x} = 5 \cdot x$$

$$x-7=5x$$

$$x-5x=7$$

$$-4x=7 \quad | :(-4)$$

$$x = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 5.

$$x \neq 0 \text{ i } 2x - 4 \neq 0$$

$$2x \neq 4$$

$$x \neq 2$$

$$D: x \in R \setminus \{0, 2\}$$

Mnożymy równanie na krzyż:

$$(2x - 4)(2x - 4) = x \cdot x$$

$$4x^2 - 8x - 8x + 16 = x^2$$

Przerzucamy na jedną stronę i przyrównujemy do 0.

$$3x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 256 - 192 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{16 - 8}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{16 + 8}{6} = \frac{24}{6} = 4$$