

IDŹ DO

PRZYKŁADOWY ROZDZIAŁ



SPIS TREŚCI

KATALOG KSIĄŻEK

KATALOG ONLINE

ZAMÓW DRUKOWANY KATALOG

TWÓJ KOSZYK

DODAJ DO KOSZYKA

CENNIK I INFORMACJE

ZAMÓW INFORMACJE
O NOWOŚCIACH

ZAMÓW CENNIK

CZYTELNIA

FRAGMENTY KSIĄŻEK ONLINE

Matematyka w Excelu dla szkół średnich. Ćwiczenia praktyczne. Wydanie II

Autor: Andrzej Obecny

ISBN: 83-7197-857-X

Format: B5, stron: 140



Czy można zmusić Excela do rozwiązywania szkolnych zadań matematycznych? Okazuje się, że tak. Aby się o tym przekonać, wystarczy sięgnąć po tę książkę. Stanowi ona zbiór kilkudziesięciu ćwiczeń z różnych działów matematyki z zakresu szkoły średniej. Autor przystępnie wyjaśnia, jak za pomocą popularnego arkusza kalkulacyjnego znaleźć rozwiązanie zadań matematycznych, w przypadku których tradycyjne metody analityczne nie sprawdzają się lub są zbyt czasochłonne. Każde z zaproponowanych przez autora ćwiczeń ma charakter uniwersalny i zachęca do własnych poszukiwań, a przy tym ich wykonanie nie zajmuje więcej niż jedną godzinę lekcyjną. Jest to zatem idealne narzędzie nie tylko dla uczniów, ale i dla nauczycieli matematyki i informatyki.



Spis treści

Zamiast wstępu — kilka pytań i odpowiedzi.....	5
Rozdział 1. Wartości liczbowe wyrażeń	9
Rozdział 2. Liczba pierwsza	14
Rozdział 3. Liczba doskonała	20
Rozdział 4. Liczba dwójkowa	25
Rozdział 5. Cechy podzielności liczby.....	32
Rozdział 6. Najmniejsza wspólna wielokrotność oraz największy wspólny dzielnik.....	38
Rozdział 7. Układ dwóch równań liniowych.....	41
Rozdział 8. Układ trzech równań liniowych.....	50
Rozdział 9. Równanie o postaci $a^2+b^2=c^2$	56
Rozdział 10. Ciągi i szeregi liczbowe.....	61
Rozdział 11. Pole obszaru	67
Rozdział 12. Całka oznaczona.....	72
Rozdział 13. Wykres funkcji $y=f(x)$	79
Rozdział 14. Miejsce zerowe funkcji $y=f(x)$	93
Rozdział 15. Ekstremum funkcji $y=f(x)$	100
Rozdział 16. Wykres funkcji dwóch zmiennych $z=f(x,y)$	108
Rozdział 17. Równania i nierówności trygonometryczne	113
Rozdział 18. Układ równań i nierówności drugiego stopnia	119
Rozdział 19. Rachunek zdań.....	126
Rozdział 20. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.....	133

Rozdział 15.

Ekstremum funkcji $y=f(x)$

Wprowadzenie

Drugim ważnym elementem charakterystyki funkcji obok miejsc zerowych są ekstrema, czyli maksima i minima. Przypomnijmy, że funkcja ma maksimum lokalne w punkcie x_0 wewnątrz przedziału $\langle a; b \rangle$, kiedy dla wszystkich wartości x z tego przedziału zachodzi nierówność $f(x) < f(x_0)$. Analogicznie określa się minimum lokalne funkcji.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby w punkcie x_0 funkcja miała maksimum, jest to, by pierwsza pochodna w tym punkcie była równa zero, zaś druga pochodna miała wartość ujemną.

W naszych ćwiczeniach — podobnie jak w przypadku całki oznaczonej — wyznaczanie ekstremów wykonany metodami przybliżonymi, bo do takich metod wykorzystać możemy Excela.

W ćwiczeniach z tego rozdziału, dysponując wykresem funkcji, wyznaczymy najpierw maksimum, a potem minimum funkcji. Każde z tych ekstremów obliczymy dwoma sposobami, budując odpowiednie formuły oraz pisząc makropolecenie.

Ćwiczenie 15.1.

Wyznacz maksimum lokalne funkcji $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$, przyjmując, że w punkcie $x_{\max}$ jest maksimum, z dopuszczalnym błędem $\pm 0,01$.

Sposób rozwiązania

Sposób, w jaki rozwiążemy to ćwiczenie, nie będzie się wiele różnił od sposobu wyznaczania miejsc zerowych. Także tutaj rozpoczniemy od wykonania wykresu funkcji i na podstawie jego analizy wyznaczymy przedziały liczbowe, w których znajdują się ekstrema.

Sposób wykonania wykresu funkcji omówiono w ćwiczeniu 13.2. Jeżeli na podstawie wykresu będzie można stwierdzić, że istnieją ekstrema, oszacujemy przedziały, w których się one znajdują. Założmy, że takie przedziały poznaliśmy. By obliczyć maksimum, wykonamy tabelę iksów i igreków. Następnie przyglądać się będziemy wartościom funkcji w poszczególnych komórkach arkusza (rozpoczynając od lewej strony przedziału), znajdując punkt (komórkę), w której wartości funkcji przestają rosnać. Gdy go znajdziemy, co musi się stać przy przyjętych przez nas założeniach, możemy punkt ten uznać za maksimum funkcji w zadanym przedziale.

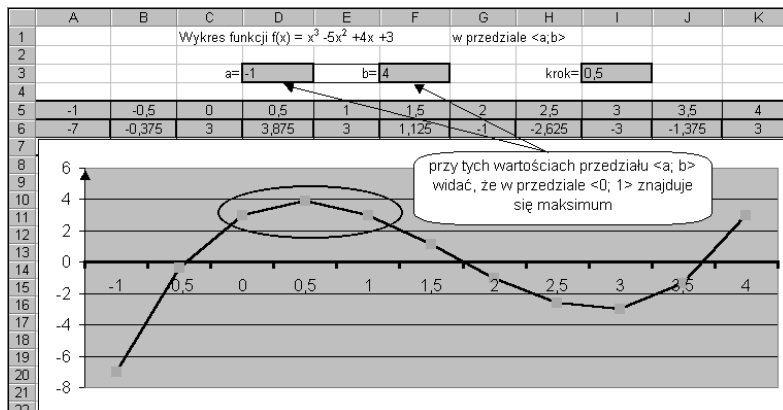
Pamiętać musimy, że wyznaczony punkt $x_{\max}$ nie będzie prawdopodobnie rzeczywistym maksimum, bowiem został wybrany spośród ograniczonej liczby punktów przedziału. Przy podziale badanego odcinka na jeszcze mniejsze znajdzie się zapewne inny punkt maksymalny $x_{\max}$. Musimy więc uściślić nasze rozwiązanie o stwierdzenie, że wyznaczaliśmy maksimum z konkretnym dopuszczalnym błędem. Zatem w naszym ćwiczeniu, aby spełnić warunki postawione w jego treści, musimy obliczać wartości funkcji w punktach oddalonych od siebie co najwyżej o 0,01.

Rozwiązanie

1. Sporządź wykres funkcji (na jego podstawie oszacujemy przedziały, w których znajdują się ekstrema).

Rysunek 15.1.

Rysunek pomocniczy do ćwiczenia 15.1



Na podstawie rysunku możemy przyjąć, że maksimum leży między 0 a 1. Ponadto w przedziale $\langle -1; 4 \rangle$ znajdują się jedyne ekstrema funkcji na całej osi liczbowej, co wynika z postaci funkcji.

2. Utwórz w pierwszym wierszu arkusza arytmetyczny ciąg liczbowy, wypełniając tabelę iksów.

Do komórki $A1$ nowego skoroszytu wpisz liczbę -0 . Następnie, wypełniając serią danych, wprowadź do sąsiednich komórek ciąg liczbowy o kroku $0,01$ i wartości końcowej 1 .

3. W drugim wierszu wpisz formułę obliczającą wartości funkcji dla poszczególnych punktów z pierwszego wiersza.

Do komórki $A2$ wpisz formułę $=A1^3-5*A1^2+4*A1+3$. Następnie przekopiuj ją do komórek sąsiednich drugiego wiersza (aż do komórki o adresie $CW2$).

4. Znajdź miejsce, w którym funkcja osiąga wartość największą.

Rysunek 15.2.

Wygląd fragmentu
arkusza z rozwiązaniem
ćwiczenia 15.2

AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49
3,875007	3,877184	3,878625	3,879336	3,879323	3,878592	3,877149

maksimum lokalne funkcji $f(x)=x^3-5x^2+4x+3$

Ćwiczenie 15.2.

Napisz makropolecenie, wyznaczające maksimum lokalne funkcji $f(x)=x^3-5x^2+4x+3$, przyjmując, że w punkcie x_{max} jest maksimum, z dopuszczalnym błędem $\pm 0,01$.

Sposób rozwiązania

Najpierw w nowym arkuszu do wybranych komórek wpisujemy określone wartości początkowe, którymi będą końce przedziału (zmienna a , b), dokładność (zmienna c) oraz formuła obliczająca wartość funkcji w punkcie a (zmienna y). Makropolecenie będzie się odwoływało do tych komórek, a niektóre z nich modyfikowało.

Samo makro rozpoczniemy od wczytania tych komórek do podanych wyżej zmiennych oraz przypisania szukanemu maksimum (zmienna max) wartości zmiennej a . Następnie utworzymy pętlę (instrukcja `Do...Loop While`), w której na początek zmienną max powiększymy o przyjętą dokładność. Wartość tę wpisujemy do komórki $E5$ i odczytujemy wartość funkcji w tym nowym punkcie (zmienna z). Mając wartości funkcji w dwóch sąsiednich punktach (y oraz z), sprawdzimy, która z nich jest większa. Jeżeli będzie nią y (lub przynajmniej będzie ona równa z), będzie to oznaczać, że wartości funkcji przestały rosnąć i znaleźliśmy maksimum. Gdy będzie odwrotnie, to wartość zmiennej z podstawimy do zmiennej y i rozpoczniemy ponownie instrukcje zawarte w pętli. Oznaczać to będzie, że rozpoczęliśmy porównywanie wartości funkcji w dwóch punktach przesuniętych (względem poprzednich dwóch punktów) o wielkość przyjętej dokładności. Jeżeli zakładamy, że w zadanym przedziale $<a; b>$ istnieje maksimum, to pętla musi się zakończyć, zanim zmienna max osiągnie wartość końca przedziału.

Rozwiązanie

1. Rozmieść w arkuszu elementy tekstowe.

Wprowadź do nowego skoroszytu dane tekstowe zgodnie z rysunkiem 15.3.

Rysunek 15.3.

Rysunek pomocniczy
do ćwiczenia 15.2

	C	D	E	F	G	H
1						
2						
3						
4		a	max	b	c	
5	x=					
6	f(x)=					
7						

2. Utwórz nowe makropolecenie.

Naciśnij klawisze *Alt+F8*. Następnie w polu *nazwa makra* wpisz *maksimum_lokalne*, po czym kliknij przycisk *Utwórz*.

3. Wpisz makro *maksimum_lokalne*.

Uzupełnij procedurę kodem, zgodnie z poniższym tekstem.

```
Sub maximum_lokalne()
Dim a, b, c, y, z, max As Single
a = Range("d5").Value
b = Range("f5").Value
c = Range("g5").Value
y = Range("d6").Value
max = a
Do
max = max + c
Range("e5").Value = max
z = Range("e6").Value
If y >= z Then
Exit Sub
End If
y = z
Loop While max <= b
End Sub
```

4. Zamknij edytor Visual Basic'a i powróć do *Arkusza1* Excela.

Użyj klawiszy *Alt+Q*.

5. Wstaw do arkusza przycisk polecenia i przypisz do niego napisane makropolecenie.

Z paska narzędziowego *Formularze* wybierz *Przycisk* i umieść go na środku arkusza. Następnie, gdy otworzy się okno z listą dostępnych makropoleceń, wskaż kliknięciem makro *maksimum_lokalne* i zaakceptuj wybór przyciskiem *OK*.

6. Zmień domyślny tekst umieszczony na przycisku.

Ustaw kursor na przycisku i naciśnij prawy przycisk myszy, następnie wybierz opcję *Edytuj tekst* i wpisz tekst *maksimum lokalne*.

7. Oblicz maksimum lokalne badanej funkcji.

Do komórek *D5*, *F5* i *G5* wpisz kolejno: 0, 1 oraz 0,01. Następnie do komórki *D6* wpisz formułę $=D5^3-5*D5^2+4*D5+3$ i przekopiuj jej zawartość do obszaru *E6÷F6*. Na koniec uruchom makro, klikając przycisk *maksimum lokalne*.

Rysunek 15.4.

*Rysunek pomocniczy
(przed uruchomieniem
makra) do ćwiczenia 15.2*

	C	D	E	F	G	H
1						
2						
3						
4		a	max	b	c	
5	x=	0,0000000		1,0000000	0,0100000	
6	f(x)=	3,0000000	3,0000000	3,0000000		
7						
8						
9			maksimum lokalne			
10						

Rysunek 15.5.

Wygląd fragmentu arkusza z rozwiązaniem ćwiczenia 15.2

	C	D	E	F	G	H
1						
2						
3						
4		a	max	b	c	
5	x=	0,0000000	0,4699998	1,0000000	0,0100000	
6	f(x)=	3,0000000	3,8793230	3,0000000		
7						
8						
9						
10						

maksimum lokalne funkcji
 $f(x) = x^2 - 9\sin^3 x - 2x - 3$

maksimum lokalne

Ćwiczenie 15.3.

Wyznacz minimum lokalne funkcji $f(x) = x^2 - 9\sin^3 x - 2x - 3$, przyjmując, że w punkcie $x_{\min}$ jest minimum, z dopuszczalnym błędem $\pm 0,001$.

Sposób rozwiązania

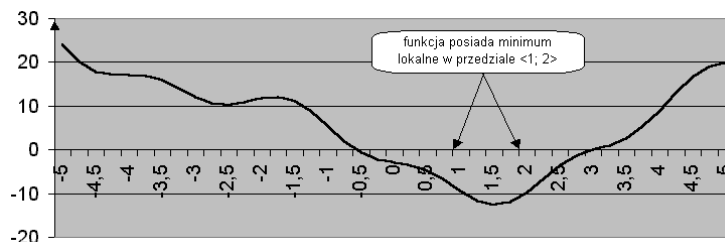
Minimum wyznaczymy w ten sam sposób, w jaki wyznaczyliśmy maksimum. Różnica polegać będzie oczywiście tylko na tym, że tym razem szukać będziemy wartości najmniejszej. Zadana jest większa dokładność, więc obliczenia przeprowadzimy w wierszach arkusza (zabrakłoby nam kolumn przy tak dużej wymaganej dokładności).

Rozwiązanie

1. Sporządź wykres funkcji (na jego podstawie oszacujemy przedziały, w których znajduje się minimum).

Rysunek 15.6.

Rysunek pomocniczy do ćwiczenia 15.3



Na podstawie rysunku możemy przyjąć, że minimum leży między 1 a 2.

2. Utwórz w kolumnie pierwszej arkusza arytmetyczny ciąg liczbowy, wypełniając tabelę iksów.

W nowym, pustym skoroszycie do komórki A1 wpisz liczbę 1. Następnie, wypełniając serią danych, wprowadź do sąsiednich komórek ciąg liczbowy o kroku 0,001 i wartości końcowej 2.

3. W kolumnie drugiej wpisz formułę obliczającą wartości funkcji dla poszczególnych punktów z pierwszej kolumny.

Do komórki B1 wpisz formułę $=A1^2 - 9*(\text{SIN}(A1))^3 - 2*A1 - 3$. Następnie przekopiuj ją do komórek sąsiednich drugiej kolumny (aż do komórki o adresie B1001).

4. Znajdź miejsca, w których funkcja osiąga wartość najmniejszą.

Rysunek 15.7.

Wygląd fragmentu
arkusza z rozwiązaniem
ćwiczenia 15.3

530	1,529	-12,696599			
531	1,53	-12,696663			
532	1,531	-12,696678			
533	1,532	-12,696674			
534	1,533	-12,696641			
535	1,534	-12,69658			
536	1,535	-12,696489			
537	1,536	-12,69637			

minimum funkcji
 $f(x) = x^2 - 9\sin^3 x - 2x - 3$

Ćwiczenie 15.4.

Napisz makropolecenie wyznaczające minimum lokalne funkcji $f(x) = x^2 - 9\sin^3 x - 2x - 3$, przyjmując, że w punkcie $x_{\min}$ jest minimum, z dopuszczalnym błędem $\pm 0,001$.

Sposób rozwiązania

Rozwiązanie to nie będzie się różniło od tego, jakie przedstawiliśmy w przypadku szukania maksimum lokalnego. W przedstawionym tam algorytmie należy jedynie wziąć pod uwagę (i zmienić), że teraz szukamy wartości najmniejszej, jaką przyjmuje funkcja w zadanym przedziale liczbowym $\langle a; b \rangle$ (patrz ćwiczenie 15.2).

Rozwiązanie

1. Rozmieść w arkuszu elementy tekstowe.

Wprowadź do nowego skoroszytu dane tekstowe zgodnie z rysunkiem 15.8.

Rysunek 15.8.

Rysunek pomocniczy
do ćwiczenia 15.4

C	D	E	F	G	H
	początek przedz.	min	koniec przedz.	krok	
x=					
f(x)=					

2. Utwórz nowe makropolecenie.

Naciśnij klawisze **Alt+F8**. Następnie w polu *nazwa makra* wpisz *minimum_lokalne*, po czym kliknij przycisk *Utwórz*.

3. Wpisz makro *minimum_lokalne*.

Uzupełnij procedurę kodem, zgodnie z poniższym tekstem.

```
Sub minimum_lokalne()
Dim a, b, c, y, z, min As Single
a = Range("d5").Value
y = Range("d6").Value
c = Range("g5").Value
b = Range("f5").Value
min = a
Do
```

```

min = min + c
Range("e5").Value = min
z = Range("e6").Value
If y < z Then
Exit Sub
End If
y = z
Loop While min <= b
End Sub

```

4. Zamknij edytor Visual Basica i powróć do *Arkusza1* Excela.

Użyj klawiszy *Alt+Q*.

5. Wstaw do arkusza przycisk polecenia i przypisz do niego napisane makropolecenie.

Z paska narzędziowego *Formularze* wybierz *Przycisk* i umieść go na środku arkusza. Następnie, gdy otworzy się okno z listą dostępnych makropoleceń, wskaż kliknięciem makro *minimum_lokalne* i zaakceptuj wybór przyciskiem *OK*.

6. Zmień domyślny tekst umieszczony na przycisku.

Ustaw kursor na przycisku i naciśnij prawy przycisk myszy, następnie wybierz opcję *Edytuj tekst* i wpisz tekst *minimum lokalne*.

7. Oblicz minimum lokalne badanej funkcji.

Do komórek *D5*, *F5* i *G5* wpisz kolejno: *1*, *2* oraz *0,001*. Następnie do komórki *D6* wpisz formułę $=D5^2-9*(\sin(D5))^3-2*D5-3$ i przekopiuj jej zawartość do obszaru *E6÷F6*. Na koniec uruchom makro, klikając przycisk *minimum lokalne*.

Rysunek 15.9.

*Rysunek pomocniczy
(przed uruchomieniem
makra) do ćwiczenia 15.4*

	początek przedz.	min	koniec przedz.	krok
x=	1,0		2,0	0,001
f(x)=	-9,362409129	-3	-9,766442502	
minimum lokalne				

Rysunek 15.10.

*Wygląd fragmentu
arkusza z rozwiązaniem
ćwiczenia 15.4*

	początek przedz.	min	koniec przedz.	krok
x=	1,0	1,5320	2,0	0,001
f(x)=	-9,362409129	-12,69667378	-9,766442502	
minimum lokalne				

Podsumowanie

Rozwiązanie za pomocą formuł uzyskuje się, jak się przekonaliśmy, bardzo szybko. Trochę więcej czasu poświęcić potrzeba na napisanie makra. W obu zaproponowanych sposobach należy rozpocząć od określenia przedziałów, w których znajdują się szukane ekstrema.

W pierwszych dwóch ćwiczeniach mieliśmy do czynienia z wielomianem, więc z tego faktu oraz z wykresu funkcji w przedziale $(0; 1)$ wynikało, że istnieje maksimum lokalne w tym przedziale. Uzyskane rozwiązanie musi być takie samo, jak przy zastosowaniu rachunku pochodnych.

Obliczmy pierwszą pochodną i znajdziemy jej miejsca zerowe:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 5x^2 + 4x + 3; \\f'(x) &= 3x^2 - 10x + 4; \\f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 4 = 0.\end{aligned}$$

I dalej:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 100 - 48 = 52.$$

Zatem:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{52}}{6} \approx 2,87;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{52}}{6} \approx 0,46.$$

W naszym przypadku interesuje nas x_2 . Obliczmy drugą pochodną i znak drugiej pochodnej w punkcie x_2 :

$$\begin{aligned}f''(x) &= 6x - 10; \\f''(x_2) &= f''(0,46) = 6 \cdot 0,46 - 10 = 2,76 - 10 = -7,24 < 0.\end{aligned}$$

Jak widać, uzyskany drogą algebraiczną wynik nie różni się od naszego rozwiązania uzyskanego metodą przybliżoną. Rozwiązanie uzyskaliśmy po prostych rachunkach, jednak ta sama metoda algebraiczna w przypadku ćwiczeń 15.3 i 15.4 nie będzie mogła znaleźć zastosowania. W tych ćwiczeniach szukaliśmy maksimum funkcji $f(x) = x^2 - 9\sin^3 x - 2x - 3$. Znalezienie miejsc zerowych pierwszej pochodnej będzie niemożliwe drogą rachunkową!

Reasumując, okazuje się, że metoda przybliżona jest skuteczniejsza, jeśli chodzi o łatwość znalezienia rozwiązania.

Rozdział 16.

Wykres funkcji dwóch zmiennych $z=f(x,y)$

Wprowadzenie

Funkcję dwóch zmiennych, której wykres niełatwo jest sobie wyobrazić, wykonać można także w prosty sposób w arkuszu Excela. W jednym ćwiczeniu z tego rozdziału przygotujemy taki arkusz, dzięki któremu można będzie obserwować, jak zmieniać się będzie kształt wykresu funkcji dwóch zmiennych w zależności od zmian wartości jej argumentów. Arkusz ten przygotujemy, używając formuł, a dodatkowo wstawimy w nim paski przewijania, by łatwiej było obserwować zmiany wykresu.

Ćwiczenie 16.1.

Sporządź wykres funkcji $f(x,y)=\sin(x/a)\cos(y/b)$ dla $x, y \in \langle -\pi; \pi \rangle$, dla następujących wartości parametrów a i b :

1. $a=1, b=1$;
2. $a=10, b=1$;
3. $a=2, b=2$.

Sposób rozwiązania

Podobnie jak robiliśmy to w przypadku wykresu funkcji jednej zmiennej, tak i tu potrzebne będzie tablicowanie funkcji.