

GRAŻYNA CZENSKOWSKA

NOWA MATURA ROZSZERZONA Z MATEMATYKI

CZ 2.

CIĄGI



ŁATWA TEORIA
PRZYKŁADY Z ROZWIĄZANIAM
ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA
PRÓBNA MATURA Z CIĄGÓW

NOWA MATURA ROZSZERZONA
Z MATEMATYKI
cz. 2
CIĄGI

©Copyright by Grażyna Czenskowska

Autor: Grażyna Czenskowska

Tytuł: Nowa matura rozszerzona z matematyki

Cz 2. Ciągi

Okładka: Grażyna Czenskowska

Kontakt: graczen@wp.pl

ISBN: 978-83-962950-3-3

Wydanie I

Warszawa 2022

Niniejsza publikacja, ani żadna jej część nie może być kopiowana, ani w jakikolwiek inny sposób reprodukowana, powielana, ani odczytywana w środkach publicznego przekazu bez pisemnej zgody wydawcy. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszelkie prawa zastrzeżone.

All rights reserved

CIAĞI

(ZAKRES ROZSZERZONY)

WSTĘP

Kolekcja Nowa matura rozszerzona z matematyki przeznaczona jest dla maturzystów oraz dla osób z klas młodszych przygotowujących się do sprawdzianów z wybranego działu.

Szczególnie publikację polecam osobom, które chciałyby zdawać maturę rozszerzoną z matematyki, a w szkole przerabiają program podstawowy.

Materiał przedstawiony w poszczególnych częściach jest przystępny, dokładnie wyjaśniony i ogranicza się do treści z programu szkolnego niezbędnych do matury rozszerzonej z matematyki.

Ciągi – to druga część kolekcji Nowa matura rozszerzona z matematyki. Znajdziecie w niej teorię, wyjaśnione przykłady, zadania do samodzielnego rozwiązania a na końcu możecie się sprawdzić na próbnej maturze z ciągów.

Życzę powodzenia

Grażyna Czenskowska



POJĘCIA WSTĘPNE

DEFINICJA CIĄGU

Ciąg jest to funkcja, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich

$$N_+ = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$$

Wartości tej funkcji nazywamy wyrazami ciągu i zapisujemy $a_n, b_n, c_n \dots$

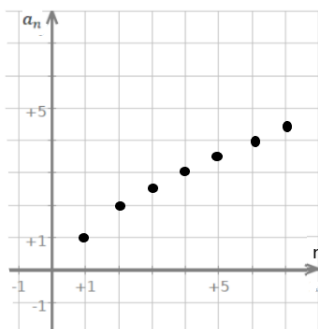
Ciąg można przedstawiać za pomocą:

wzoru ogólnego np. $a_n = (-3)^n \cdot (n + 4)$

wzoru rekurencyjnego np. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$

wypisując wyrazy np. $(-3, -1, 1, 3, \dots)$

przedstawiając wykres



PRZYKŁADY

1. Oblicz trzeci wyraz ciągu

$$a_n = \frac{(-2)^n + 2}{n + 1}$$

$$a_3 = \frac{(-2)^3 + 2}{3 + 1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

2. Oblicz czwarty wyraz ciągu

$$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$a_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

3. Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów ciągu określonego wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2a_n - n^2 + 4 \end{cases}$$

$$a_2 = 2a_1 - 1^2 + 4 = 2 \cdot (-3) - 1 + 4 = -3$$

$$a_3 = 2a_2 - 2^2 + 4 = 2 \cdot (-3) - 4 + 4 = -6$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -3 - 3 - 6 = -12$$

4. Wyznacz wyrazy ciągu $a_n = n^3 - 9n$ równe 0

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć wyrazy równe 0 należy wzór ciągu przyrównać do zera i obliczyć $n \in N_+$.

$$n^3 - 9n = 0$$

$$n(n - 3)(n + 3) = 0$$

$$n = 0 \vee n = -3 \vee n = 3$$

Z trzech otrzymanych liczb tylko 3 jest liczbą naturalną dodatnią. Czyli tylko trzeci wyraz ciągu a_n jest równy 0.

Odpowiedź: $a_3 = 0$

5. Ile wyrazów ciągu $a_n = n^2 - 6n + 5$ jest ujemnych ?

Rozwiązanie:

Aby znaleźć wyrazy ujemne musimy rozwiązać nierówność

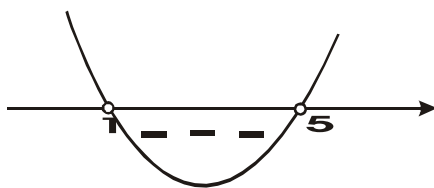
$$n^2 - 6n + 5 < 0$$

Obliczamy Δ i miejsca zerowe

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$n_1 = \frac{6 - 4}{2} = 1, \quad n_2 = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

Rysujemy parabolę i ze zbioru rozwiązań wyznaczamy tylko liczby naturalne



dodatnie

Nierówność jest spełniona przez wszystkie liczby zawarte między 1 a 5.
Wybieramy z tego zbioru liczby naturalne dodatnie i formułujemy odpowiedź.

Odpowiedź: $n \in \{2; 3; 4\}$.

W ciągu $a_n = n^2 - 6n + 5$ są trzy wyrazy ujemne.

6. Dany jest ciąg

$$a_n = n^3 + 5n^2 - n - 5$$

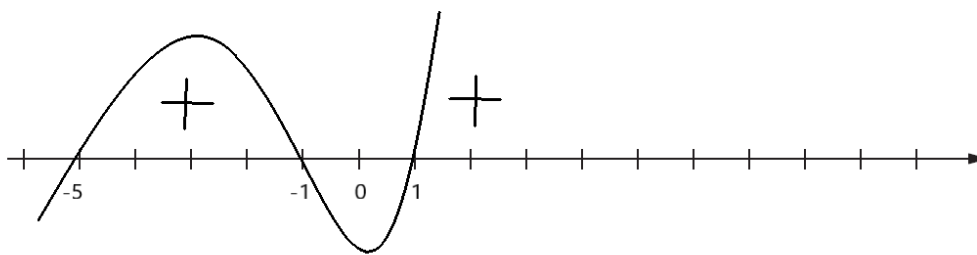
Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są nieujemne

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność

$$n^3 + 5n^2 - n - 5 \geq 0$$

$$(n + 5)(n - 1)(n + 1) \geq 0$$



$n \in N_+$ zatem otrzymujemy liczby $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Odp. Wszystkie wyrazy ciągu a_n są nieujemne

7. Dany jest ciąg

$$a_n = \frac{n^2 + 4n + 16}{n + 2}$$

Wyznacz wyrazy całkowite ciągu a_n

Rozwiązanie

Przekształcamy wzór ciągu

$$a_n = \frac{n^2 + 4n + 4 + 12}{n + 2} = \frac{(n + 2)^2 + 12}{n + 2} = \frac{(n + 2)^2}{n + 2} + \frac{12}{n + 2}$$

$$a_n = n + 2 + \frac{12}{n + 2}$$

$n \in N_+ \Rightarrow n + 2 \in N$ zatem rozpatrujemy tylko wyrażenie

$$\frac{12}{n + 2}$$

To wyrażenie jest całkowite, gdy $(n + 2)$ jest dzielnikiem 12

Czyli: $n + 2 = 1 \vee n + 2 = 2 \vee n + 2 = 3 \vee n + 2 = 4 \vee n + 2 = 6 \vee n + 2 = 12$

$$n = -1 \vee n = 0 \vee n = 1 \vee n = 2 \vee n = 4 \vee n = 10$$

Zatem $n = 1 \vee n = 2 \vee n = 4 \vee n = 10$

Wyrazy całkowite

$$a_1 = 7, \quad a_2 = 7, \quad a_4 = 8, \quad a_{10} = 13$$



ZRÓB TO SAM

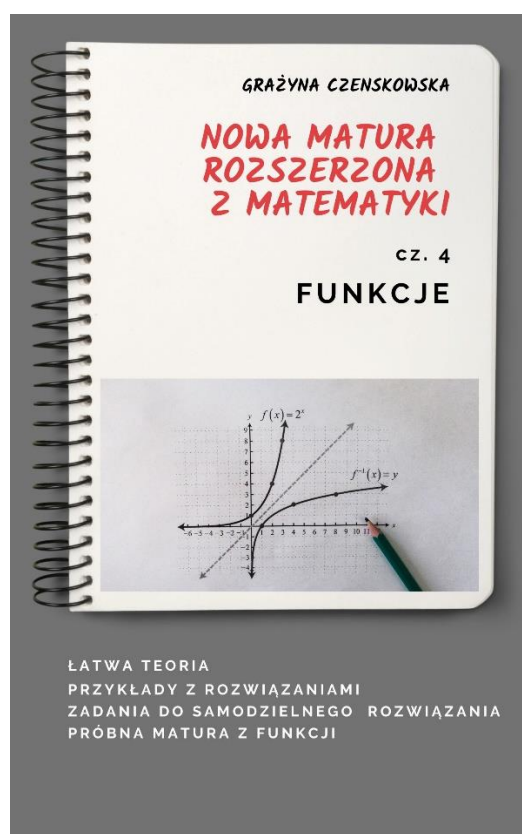
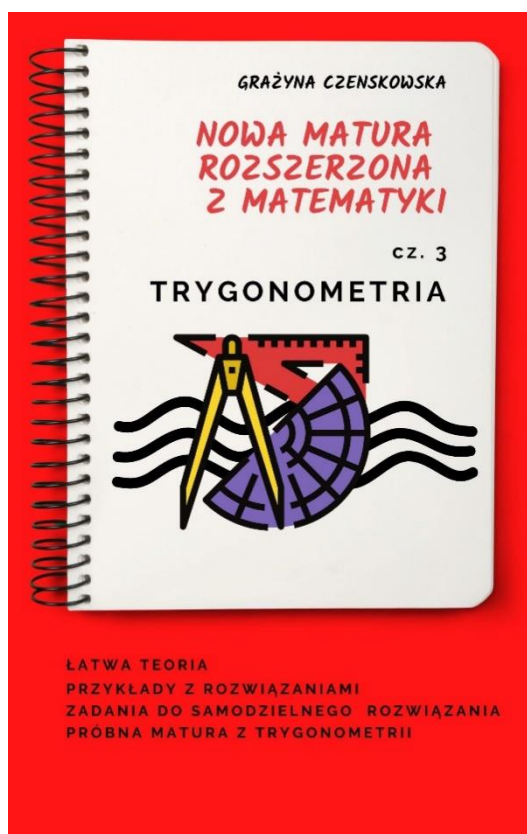
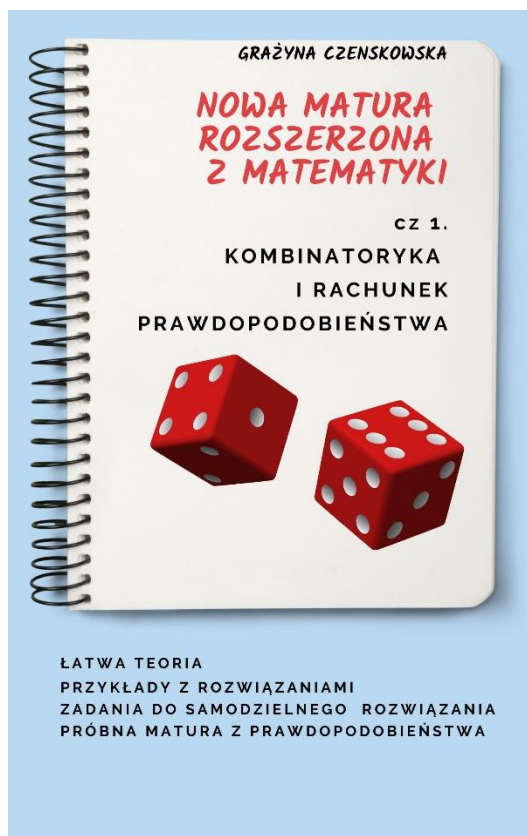
Zadanie 1.

Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu

$$a_n = \frac{3n^3 + 6n^2 - 3n - 6}{n^2 + 3n + 2}$$

są liczbami całkowitymi





Cz. 2 Ciągi – Grażyna Czenskowska

[Kup książkę](#)

GRAŻYNA CZENSKOWSKA

MATURA PODSTAWA Z MATEMATYKI 2022...



**ŁATWA TEORIA
PRZYKŁADY Z ROZWIĄZANIAM
ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA
ARKUSZE MATURALNE
ODPOWIEDZI**

Grażyna Czenskowska

NOWA MATURA z matematyki od 2023

zakres podstawowy

**KURS PRZYGOTOWAWCZY ZGODNY
Z ZALECENIAMI CENTRALNEJ KOMISJI
EGZAMINACYJNEJ**



**ŁATWA TEORIA
NOWE TYPY ZADAŃ
PRZYKŁADY Z ROZWIĄZANAMI**



Grażyna Czenskowska – z wykształcenia matematyk przez wiele lat pracowała w renomowanych warszawskich liceach: VIII LO im. Władysława IV, XXXV LO im. Bolesława Prusa, NLO 81 SGH.

Swoje doświadczenie w pracy z uczniami wykorzystuje pisząc książki z dziedziny matematyki. Autorka serii pt.: „Przed klasówką i maturą z matematyki” oraz „Matura podstawowa z matematyki 2022, 2023.... i „Nowa matura podstawowa z matematyki”

Teraz ruszam z nowym cyklem książek pt. „Nowa matura rozszerzona z matematyki”

Jest to zbiór opracowań stanowiący skuteczną pomoc w przygotowaniu się do matury rozszerzonej z matematyki.

W każdej części teoria przedstawiona jest w łatwy, przystępny sposób i poparta dokładnie wyjaśnionymi przykładami. Rozwiązując serię zadań zawartych w publikacji można skutecznie doskonalić warsztat a potem sprawdzić swoją wiedzę rozwiązując próbną maturę z danego działu zawartą w każdej części.

Kolekcja NOWA MATURA ROZSZERZONA Z MATEMATYKI składa się z następujących części:

1. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa
2. Ciągi
3. Trygonometria
4. Funkcje
5. Rachunek różniczkowy
6. Geometria analityczna
7. Planimetria
8. Stereometria