

Stefan Starzyński

ATLAS MATEMATYCZNY

Studia

Rozszerzenie

**Poziom szkoły
średniej**

**Poziom szkoły
podstawowej**

Helion

Atlas matematyczny

Autorzy* treści – geniusze matematyczni swoich epok:

Tales z Miletu (ok. 627–ok. 540 p.n.e.)

Pitagoras (ok. 572–ok. 497 p.n.e.)

Euklides (ok. 300 p.n.e.)

Archimedes (ok. 287–ok. 212 p.n.e.)

Apoloniusz z Pergii (ok. 262–ok. 200 p.n.e.)

Heron z Aleksandrii (I wiek n.e.)

Diofantos (druga połowa III wieku)

Pappus z Aleksandrii (przełom III i IV wieku)

Aryabhata I (ok. 475–?)

Muhammed Ibn Musa Alchwarizmi (ok. roku 800)

Francois Viète (1540–1603)

Renè Descartes *Kartezjusz* (1596–1650)

Blaise Pascal (1623–1662)

Gottfried Leibniz (1646–1716)

Izaak Newton (1642–1727)

Abraham de Moivre (1667–1754)

Leonard Euler (1707–1783)

Augustin Louios Cauchy (1789–1857)

Heinrich Eduard Heine (1821–1881)

* *Poczet wielkich matematyków* Instytut Wydawniczy Nasza Księgarnia Warszawa 1989

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Projekt okładki: Stefan Starzyński

Projekt graficzny: Stefan Starzyński

Wydawnictwo HELION

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: helion@helion.pl

WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://helion.pl/user/opinie/atlmat>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Możesz też napisać do autora na adres StefanStarzynski@wp.pl
lub odwiedzić jego stronę SztukaLiczenia.net.

ISBN: 978-83-283-4760-1

Copyright © Stefan Starzyński 2019

Printed in Poland.

- Kup książkę
- Poleć książkę
- Oceń książkę

- Księgarnia internetowa
- Lubię to! » Nasza społeczność

Spis treści

Temat 1	Rachunek zdań Zdania i działania logiczne. Tautologia. Forma zdaniowa. Kwantyfikatory. Budowa twierdzenia.
Temat 2	Rachunek zbiorów Symbolika zbiorów. Działania na zbiorach. Relacje między zbiorami. Związki między rachunkiem zdań a rachunkiem zbiorów.
Temat 3	Liczby całkowite Liczby pierwsze. Liczby naturalne. Liczby całkowite.
Temat 4	Indukcja matematyczna Zasada indukcji. Twierdzenia z sumami ciągów. Twierdzenia z podzielnością. Twierdzenia geometryczne.
Temat 5	Liczby wymierne Liczby wymierne. Operacje i działania na ułamkach. Ułamki dziesiętne. Ułamki okresowe.
Temat 6	Procenty i promile Procenty. Procent składany. Promile.
Temat 7	Liczby niewymierne Liczby niewymierne. Ograniczenia i kresy zbiorów liczbowych. Przybliżenia liczb. Usuwanie niewymierności z mianownika.
Temat 8	Liczby rzeczywiste Klasyfikacja zbiorów liczbowych. Przedziały liczbowe – podzbiory zbioru $\mathbb{R}$. Hierarchia inkluzji zbiorów liczbowych. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
Temat 9	Potęgi i pierwiastki Potęgi o wykładnikach naturalnych. Potęgi o wykładnikach całkowitych. Potęgi o wykładnikach wymiernych. Pierwiastki.
Temat 10	Wzory skróconego mnożenia Kwadrat sumy lub różnicy. Różnica kwadratów. Suma kwadratów. Sześciąt sumy lub różnicy. Suma lub różnica sześciątów. Wzór dwumianowy Newtona.
Temat 11	Liczby zespolone Postać kanoniczna. Działania na liczbach zespolonych. Interpretacja geometryczna. Postać trygonometryczna. Wzory de Moivre'a.
Temat 12	Równania zespolone Rozwiązywanie z układami równań. Rozwiązywanie ze wzorami de Moivre'a.
Temat 13	Relacje Para uporządkowana. Produkt kartezjański. Relacja. Własności relacji. Klasy abstrakcji.
Temat 14	Funkcje Funkcja. Sposoby opisu funkcji.
Temat 15	Funkcje liniowe Postać kierunkowa prostej. Funkcja liniowa z parametrem. Wykres funkcji liniowej.
Temat 16	Równania i nierówności liniowe Równanie liniowe z jedną niewiadomą. Równanie liniowe z parametrem. Nierówności liniowe z jedną niewiadomą. Nierówności liniowe z parametrem.
Temat 17	Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi Postać ogólna prostej lub półpłaszczyzny. Rozwiązania równań liniowych. Interpretacja graficzna.
Temat 18	Układy równań liniowych 2 na 2 Układ równań 2 na 2. Wyznacznik 2 na 2. Rozwiązywanie układów równań 2 na 2.
Temat 19	Macierze Budowa macierzy. Działania na macierzach. Macierz odwrotna.
Temat 20	Wyznaczniki Obliczanie wyznaczników. Własności wyznaczników.
Temat 21	Układy Cramera Układ n równań z n niewiadomymi. Metoda wyznacznikowa. Metoda macierzowa.

Spis treści

- Temat 22 Układy równań liniowych**
Układ równań liniowych. Rozwiązywanie układu równań liniowych.
- Temat 23 Funkcje kwadratowe – przypadki szczególne**
- Temat 24 Funkcje kwadratowe**
Postać ogólna. Postać kanoniczna. Postać iloczynowa. Wzory Viète'a. Parabola.
- Temat 25 Równania kwadratowe**
Równania kwadratowe, niezupełne. Równania kwadratowe ze wzorami skróconego mnożenia. Równania kwadratowe ze wzorami Viète'a. Równania kwadratowe dowolne.
- Temat 26 Nierówności kwadratowe**
Postać ogólna nierówności (równań) kwadratowych. Rozwiązania nierówności. Rozwiązania równań.
- Temat 27 Wykresy funkcji kwadratowych**
Przypadki położenia paraboli na płaszczyźnie.
- Temat 28 Równania i nierówności kwadratowe z parametrem**
Równania kwadratowe. Nierówności kwadratowe.
- Temat 29 Wielomiany – postać ogólna**
Funkcje wielomianowe. Działania na wielomianach.
- Temat 30 Wielomiany – postać iloczynowa**
Twierdzenie o postaci iloczynowej wielomianu. Pierwiastki wielomianów.
- Temat 31 Twierdzenia o wielomianach**
Twierdzenie o rozkładzie wielomianu. Twierdzenie Bézouta. Reszta z dzielenia wielomianu.
- Temat 32 Wykresy wielomianów**
Badanie przebiegu zmienności wielomianów.
- Temat 33 Równania wielomianowe**
Postać ogólna równań wielomianowych. Sprowadzanie wielomianów do postaci iloczynowej.
- Temat 34 Nierówności wielomianowe**
Wykresy wielomianów z dokładnością do znaków. Postać ogólna nierówności wielomianowych.
- Temat 35 Funkcje homograficzne**
Postać ogólna. Postać kanoniczna. Transformacje wzorów. Translacje wykresów.
- Temat 36 Równania i nierówności homograficzne**
Równania homograficzne. Nierówności homograficzne.
- Temat 37 Funkcje wymierne**
Postać ogólna i badanie. Wykresy.
- Temat 38 Równania i nierówności wymierne**
Równania lub nierówności wymierne. Interpretacja graficzna.
- Temat 39 Funkcje potęgowe**
Postać ogólna. Własności. Wykresy.
- Temat 40 Funkcje, równania i nierówności wykładnicze**
Funkcja wykładnicza. Własności funkcji wykładniczych. Równania lub nierówności wykładnicze.
- Temat 41 Logarytmy**
Logarytm. Własności logarytmów. Podstawowe wzory logarytmiczne.
- Temat 42 Funkcje, równania i nierówności logarytmiczne**
Funkcja logarytmiczna. Własności funkcji logarytmicznych. Równania lub nierówności logarytmiczne.
- Temat 43 Pojęcia trygonometryczne**
Zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.
- Temat 44 Tożsamości trygonometryczne**
Związki między funkcjami trygonometrycznymi. Funkcje trygonometryczne sumy (różnicy) kątów. Funkcje trygonometryczne połowy kąta. Jedynka trygonometryczna. Sumy/różnice funkcji trygonometrycznych. Funkcje trygonometryczne kąta podwojonego.

Spis treści

Temat 45	Funkcje trygonometryczne Sinus i cosekans. Cosinus i secans. Tangens i cotangens. Wzory redukcyjne. Znaki i monotoniczność funkcji trygonometrycznych w przedziałach.
Temat 46	Równania i nierówności trygonometryczne Równania. Nierówności.
Temat 47	Własności funkcji Funkcje „w/na”. Różnowartościowość. Odwracalność. Monotoniczność. Wypukłość. Parzystość. Ograniczoność. Okresowość.
Temat 48	Funkcje odwrotne Wzory funkcji odwrotnych. Wykresy funkcji odwrotnych.
Temat 49	Przekształcenia wykresów funkcji Przesunięcia (translacje). Symetrie. Powinowactwa.
Temat 50	Funkcja z wartością bezwzględną Funkcje postaci $y = f(x) $. Funkcje postaci $y = f(x)$. Funkcje z wartością bezwzględną bez reguły.
Temat 51	Ciągi liczbowe Ciąg liczbowy. Opisy ciągów liczbowych. Własności ciągów liczbowych.
Temat 52	Granice ciągów Granica ciągu liczbowego. Własności granic ciągów. Wybrane granice ciągów. Symbole granic.
Temat 53	Ciągi szczególne Ciągi arytmetyczne. Ciągi geometryczne.
Temat 54	Szeregi geometryczne Szereg geometryczny. Zbieżność szeregu geometrycznego. Interpretacje graficzne.
Temat 55	Granice funkcji w nieskończoności Granice w plus/minus nieskończoności. Granice w nieskończoności właściwe/niewłaściwe.
Temat 56	Granice funkcji w punkcie Granice w punkcie. Granice jednostronne. Granice w punkcie właściwe/niewłaściwe.
Temat 57	Własności granic funkcji Własności granic. Wybrane granice. Symbole granic.
Temat 58	Ciągłość funkcji Przypadki nieciągłości funkcji.
Temat 59	Pochodna funkcji w punkcie Otoczenie punktu. Iloraz różnicowy. Pochodna funkcji w punkcie. Interpretacja graficzna pochodnej.
Temat 60	Różniczkowalność funkcji Różniczkowalność funkcji. Interpretacja graficzna różniczkowalności. Różniczkowalność jednostronna w punkcie.
Temat 61	Pochodne funkcji Pochodna funkcji. Monotoniczność. Ekstrema lokalne. Wypukłość. Punkty przegięcia.
Temat 62	Pochodne funkcji elementarnych Pochodne funkcji: potęgowych, wielomianowych, wymiernych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych, cyklometrycznych.
Temat 63	Pochodne funkcji nieelementarnych Pochodna sumy, różnicy, iloczynu lub ilorazu. Pochodna funkcji odwrotnej. Pochodna funkcji złożonej.
Temat 64	Badanie funkcji
Temat 65	Całki nieoznaczone Funkcja pierwotna. Całki podstawowe. Własności całek. Całkowanie przez części. Całkowanie przez podstawianie.
Temat 66	Całki oznaczone Całka oznaczona. Własności całek oznaczonych. Całkowanie oznaczone przez części. Całkowanie oznaczone przez podstawianie. Interpretacja graficzna.
Temat 67	Kombinatoryka Silnia. Symbol Newtona. Trójkąt Pascala. Schemat rozwiązywania zadań.

Spis treści

Temat 68	Język prawdopodobieństwa Tabela pojęć i symboli.
Temat 69	Prawdopodobieństwo Prawdopodobieństwo klasyczne. Własności prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo warunkowe. Prawdopodobieństwa całkowite. Schemat rozwiązywania zadań.
Temat 70	Elementy statystyki Zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej. Wartość oczekiwana. Wariancja zmiennej losowej. Odchylenie standardowe.
Temat 71	Kąty i trójkąty Miary kątowe. Twierdzenie Talesa. Podobieństwo trójkątów. Pole trójkąta. Twierdzenie sinusów. Twierdzenie cosinusów. Twierdzenie Pitagorasa.
Temat 72	Okręgi i koła Okrąg/koło. Okrąg opisany na trójkącie lub wpisany w trójkąt. Okrąg opisany na czworokącie lub wpisany w czworokąt. Figury w kole. Kąty w okręgu/kole. Wzajemne położenia okręgów/kół.
Temat 73	Wybrane figury planimetrii Trójkąty. Wielokąty foremne. Koło i jego elementy. Czworokąty.
Temat 74	Wybrane figury stereometrii Graniastosłupy proste. Bryły obrotowe. Ostrosłupy proste.
Temat 75	Wektory na płaszczyźnie Opis wektora. Długość wektora. Współczynnik kierunkowy wektora. Wektor zerowy. Równość wektorów. Interpretacja graficzna. Działania na wektorach. Prostopadłość/równoległość wektorów.
Temat 76	Proste na płaszczyźnie Opis położenia prostej. Interpretacje graficzne opisu prostych. Postacie opisu prostej: ogólna, kierunkowa, wyznacznikowa, parametryczna, odcinkowa.
Temat 77	Krzywe stożkowe Okrąg. Hiperbola. Elipsa. Parabola.
Temat 78	Przekroje stożka Okrąg. Elipsa. Parabola. Hiperbola.
Temat 79	Elementy geometrii analitycznej Punkty. Punkty i proste. Proste. Proste i wektory.
Temat 80	Przekształcenia płaszczyzny Przesunięcia. Obroty. Jednokładności. Powinowactwa.

Tablice trygonometryczne

Tablice: sinusów, cosinusów, tangensów, cotangensów kątów. Zamiana miary stopniowej na łukową.

Tablice działań

Odwrotności, kwadraty, sześciany, pierwiastki kwadratowe oraz sześciennie, wybrane wartości wykładnicze oraz logarytmy liczb naturalnych od 0 do 100.

Dodatki

Alfabet grecki. Jednostki wielokrotne i podwielokrotne. Liczby rzymskie.

Skorowidz pojęć

- Zakres odpowiadający szkole podstawowej.
- Zakres odpowiadający podstawowemu programowi wszystkich szkół średnich, w tym w szczególności: liceom ogólnokształcącym, szkołom zawodowym wszystkich typów (zasadnicze szkoły zawodowe i technika) do poziomu obligatoryjnej matury w zakresie podstawowym.
- Zakres odpowiadający maturze w zakresie rozszerzonym realizowanym w liceach ogólnokształcących w klasach o profilu matematycznym.
- Zakres pierwszego roku studiów wyższych pierwszego stopnia na wszystkich kierunkach uniwersyteckich z matematyką, tj. przede wszystkim na kierunkach ścisłych takich jak matematyka, informatyka, fizyka, chemia, astronomia, na kierunkach inżynierskich, politechnikach na poziomie licencjatu oraz uczelniach ekonomicznych na kierunkach: ekonomia, bankowość i zarządzanie.

Potęgi o wykładnikach naturalnych

Definicja

Potęga o podstawie a i wykładniku n to działanie:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow n = 0 \wedge a \neq 0 \\ a & \Leftrightarrow n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n & \Leftrightarrow n > 1 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \ni a$ – **podstawa** potęgi $\mathbb{N} \ni n$ – **wykładnik** potęgi

Przykłady

$3^0 = 1$ $5^1 = 5$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $10^5 = 100000$

WZÓR	ZAŁOŻENIA	Przykład
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a, b \in \mathbb{R}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$		$2^2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a \neq 0$ $m > n$	$2^{30} : 2^{27} = 2^3 = 8$
$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$b \neq 0$	$2^2 : 3^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$m, n \in \mathbb{N}$	$(2^2)^3 = 2^6 = 64$

Potęgi o wykładnikach całkowitych

Definicja

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym to potęga odwrotności podstawy o przeciwnym wykładniku:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$a \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$

Przykłady

$3^{-1} = \frac{1}{3}$ $2^{-3} = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$ $\sqrt{5}^{-4} = \frac{1}{25}$

WZÓR	ZAŁOŻENIA	Przykład
$a^k \cdot a^l = a^{k+l}$	$a, b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$ $k, l \in \mathbb{C}$	$2^3 \cdot 2^{-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
$a^k \cdot b^k = (ab)^k$		$2^{-2} \cdot 3^{-2} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$
$a^k : a^l = a^{k-l}$		$2^3 : 2^{-2} = 2^5 = 32$
$a^k : b^k = \frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$		$2^{-2} : 3^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$
$(a^k)^l = a^{kl}$		$(2^{-2})^3 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$

Potęgi o wykładnikach wymiernych

Definicja

Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim typu $\frac{1}{n}$ to pierwiastek⁽¹⁾ stopnia n z podstawy potęgi a :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$a \geq 0$, gdy n parzyste $a \in \mathbb{R}$, gdy n nieparzyste
 $n \in \mathbb{N}$

Przykłady

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $1024^{\frac{1}{10}} = 2$

WZÓR	ZAŁOŻENIA		Przykład
	n - parz.	n - niep.	
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$	$a \geq 0$	$a \in \mathbb{R}$	$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$a > 0$	$a \neq 0$	$2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Pierwiastki

Definicja

Pierwiastek arytmetyczny z liczby a stopnia n to działanie:

$$\sqrt[n]{a} = p \Leftrightarrow p^n = a$$

$0 \leq a$ – **wartość podpierwiastkowa**, gdy n - parzyste
 $\mathbb{R} \ni a$ – **wartość podpierwiastkowa**, gdy n - nieparzyste
 $\mathbb{N} \ni n$ – **stopień pierwiastka**

Oznaczenia

$\sqrt[n]{a} = a$ $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Przykłady

$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\sqrt[10]{1024} = 2$

WZÓR	ZAŁOŻENIA		Przykład
	n - parz.	n - nieparz.	
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$a \geq 0$ $b \geq 0$	$a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$	$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$a \geq 0$ $b > 0$	$a \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$	$a \geq 0$	$a \in \mathbb{R}$	$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$a \geq 0$	$\begin{matrix} m \\ \text{- parz.} \end{matrix}$ $a \geq 0$ $\begin{matrix} m \\ \text{- nieparz.} \end{matrix}$ $a \in \mathbb{R}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$	$a \geq 0$	$a \geq 0$ $a \in \mathbb{R}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{32}$
$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$	$a > 0$	$a > 0$ $a \neq 0$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

Obliczanie wyznaczników

Definicja

Wyznacznik macierzy kwadratowej⁽¹⁾ $[a_{ij}]_{n \times n}$ to liczba określona następująco:

$$\det A = |A| = \begin{cases} \det [a_{ij}]_{1 \times 1} = \det [a] = |a| = a \\ \det [a_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \det [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ \dots \dots \dots \\ \det [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ = a_{i1}|A_{i1}| - a_{i2}|A_{i2}| + a_{i3}|A_{i3}| - \dots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \end{cases} \quad (2)$$

A – macierz⁽³⁾ $n \in \mathbb{N}$

$|A_{ij}|$ – wyznacznik z podmacierzy powstałej przez usunięcie z macierzy A i -tego wiersza i j -tej kolumny – **minor macierzy** A

Przykłady

$$\begin{aligned} \det[5] &= |5| = 5^{(4)} \\ \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6 \\ \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot (-3) = 3 \end{aligned}$$

Własności wyznaczników

Twierdzenie	Przykład
Transpozycja macierzy nie zmienia jej wyznacznika: $\det A^T = \det A$.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$
Jeżeli macierz A zawiera wiersz lub kolumnę złożony/ą z samych zer to $\det A = 0$.	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$
Jeżeli macierz A ma dwa proporcjonalne wiersze lub kolumny to $\det A = 0$.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
Jeżeli zamienimy miejscami dwa wiersze lub kolumny, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$
Jeżeli do danego wiersza lub kolumny dodamy wartości innego wiersza (innej kolumny) pomnożone przez pewną stałą, to wyznacznik nie zmieni wartości.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -2 \quad (5)$

Własności wyznaczników pozwalają obliczać sprawnie wyznaczniki macierzy większych rozmiarów na podstawie rozwinięcia Laplace'a, sprowadzając je do jednego składnika z jednym podwyznacznikiem coraz mniejszego rozmiaru.

Przykłady

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= {}^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 6 \\ -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = {}^{(7)} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = {}^{(8)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = {}^{(9)} \\ &= -3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = {}^{(10)} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = {}^{(11)} \\ &= -3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |3| = -3 \cdot |3| = -3 \cdot 3 = -9 \end{aligned}$$

- (1) Wyznaczniki istnieją tylko dla macierzy kwadratowych. Rozwinięcie dla macierzy o wymiarach 3 na 3 nazywa się **schematem Sarrusa**, a dla większych – **rozwinięciem Laplace'a**. We wzorze definicji wyznacznika rozwinięcie Laplace'a pokazano według dowolnego (i -tego) wiersza. Rozwinięcie to może być również według dowolnej (j -tej) kolumny:
- $$\det [a_{ij}]_{n \times n} = a_{1j}|A_{1j}| - a_{2j}|A_{2j}| + a_{3j}|A_{3j}| - \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$$

W praktyce obliczeniowej dla większych wyznaczników unika się obliczania dużej liczby minorów przez zastosowanie $\rightarrow$ **Własności wyznaczników**, tak aby w jakimś wierszu lub kolumnie wystąpiła tylko jedna liczba różna od zera, a co za tym idzie tylko jeden minor, z którym następnie postępujemy według tego samego schematu aż do otrzymania wyznacznika o wymiarach co najwyżej 3 na 3.

- (2) $\rightarrow$ Wyznacznik 2 na 2 $\rightarrow$ Układy równań liniowych 2 na 2 $\rightarrow$ Temat 18

- (3) $\rightarrow$ Macierze $\rightarrow$ Temat 19

- (4) Wartością wyznacznika rozmiaru 1 na 1 jest wartość pozostałego w nim elementu. Nie mylić z wartością bezwzględną!

Kup książkę

- (5) Do wartości drugiego wiersza dodano podwojone wartości wiersza pierwszego.
(6) Korzystając z ostatniej własności wyznaczników, do wartości kolumny czwartej dodano wartości kolumny pierwszej, a do wartości kolumny trzeciej dodano wartości kolumny pierwszej pomnożone przez liczbę -2. W ten sposób otrzymano w wierszu pierwszym tylko jedną wartość różną od zera.

- (7) Rozwinięcie Laplace'a według pierwszego wiersza.

- (8) Tu można by skorzystać już ze schematu Sarrusa, ale korzystając ponownie z ostatniej własności wyznaczników, do pierwszego wiersza dodano podwojone wartości wiersza trzeciego. W ten sposób otrzymano w kolumnie trzeciej tylko jedną wartość różną od zera.

- (9) Rozwinięcie Laplace'a według trzeciej kolumny.

- (10) Tu można by skorzystać już ze schematu obliczania wyznacznika o wymiarach 2 na 2, ale można też jeszcze raz skorzystać z ostatniej własności wyznaczników i od wartości kolumny drugiej odjąć wartości kolumny pierwszej, otrzymując kolejne zero.

- (11) Kolejne rozwinięcie Laplace'a według pierwszego wiersza sprowadza nasz wyznacznik do rozmiarów 1 na 1 – nie mylić ze znakiem wartości bezwzględnej!

Poleć książkę

Całka oznaczona

Definicja

Całka oznaczona funkcji $f(x)$ na przedziale $\langle a; b \rangle$ to różnica wartości dowolnej funkcji pierwotnej⁽¹⁾ $F(x)$ danej funkcji na krajcach danego przedziału:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Przykład

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Własności całek oznaczonych⁽²⁾

Twierdzenia

Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne na przedziale $\langle a; b \rangle$, to zachodzą związki:

- ① $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- ② $\int_a^b k f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \quad k \neq 0$
- ③ $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln|f(x)| + C]_a^b$
- ④ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad c \in (a; b)$

Przykłady

1. $\int_1^2 (x^2 - 3x + 1) dx = \textcircled{1} = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 (-3x) dx + \int_1^2 1 dx = \textcircled{2}$
 $= \int_1^2 x^2 dx - 3 \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 - 3 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 + [x]_1^2 =$
 $= \frac{1}{3} [x^3]_1^2 - \frac{3}{2} [x^2]_1^2 + [x]_1^2 = \frac{1}{3} [8 - 1] - \frac{3}{2} [4 - 1] + [2 - 1] = -\frac{7}{6}$
2. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx = \textcircled{3} = [\ln|x^2+3|]_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$
3. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = \textcircled{4} = \int_0^\pi \cos x dx + \int_\pi^{2\pi} \cos x dx =$
 $= [-\cos x]_0^\pi + [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -([\cos x]_0^\pi + [\cos x]_\pi^{2\pi}) =$
 $= -([\cos \pi - \cos 0] + [\cos 2\pi - \cos \pi]) = 0$

Całkowanie oznaczone przez części⁽³⁾

Twierdzenie

Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają na przedziale $\langle a; b \rangle$ ciągłe pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$, to:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Przykłady

1. $\int_0^\pi x \sin x dx = [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx =$
 $= -[x \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \pi$
2. $\int_1^e \ln x dx = [(\ln x)x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e =$
 $= [e \ln e - \ln 1] - [e - 1] = [e - 0] - [e - 1] = 1$

Całkowanie oznaczone przez podstawianie⁽⁴⁾

Twierdzenie

Jeśli funkcja $t = g(x)$ ma ciągłą pochodną $g'(x)$ na przedziale $\langle a; b \rangle$, a zbiór wartości funkcji $g(x)$ zawiera się w przedziale $\langle \alpha; \beta \rangle$, na którym jest określona ciągła funkcja $f(t)$ i $g(a) = \alpha$ oraz $g(b) = \beta$, to:

$$\int_a^b f[g(x)] g'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(t) dt$$

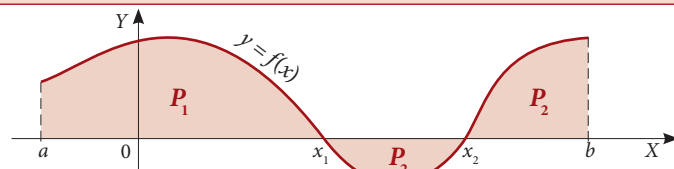
Przykłady

1. $\int_0^\pi \sin 2x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin t dt =$
 $= \frac{1}{2} [-\cos t]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} [\cos 2\pi - \cos 0] = -\frac{1}{2} [1 - 1] = 0$
2. $\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \int_1^2 \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt =$
 $= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} [\sqrt{t^3}]_1^2 = \frac{1}{3} [\sqrt{8} - \sqrt{1}] = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$

(1) → **Całki nieoznaczone** → Temat 65
 (2) Porównaj → **Własności całek** → **Całki nieoznaczone** → Temat 65
 (3/4) Porównaj → **Całkowanie przez części/podstawianie** → **Całki nieoznaczone** → Temat 65
 Kup książkę

Interpretacja graficzna

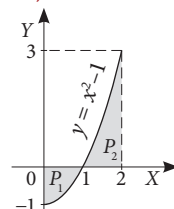
Pola figur ograniczonych⁽⁵⁾



$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

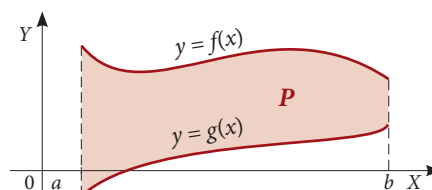
Przykład



$$P_1 = -\int_0^1 (x^2 - 1) dx = -\left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

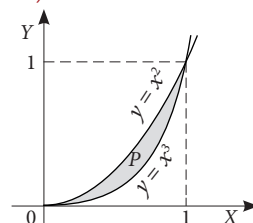
$$P_2 = \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$P = P_1 + P_2 = 2$$



$$P = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Przykład

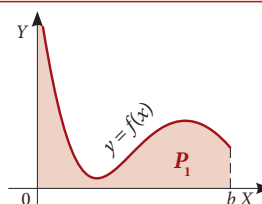


$$P = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 =$$

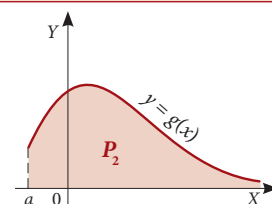
$$= \frac{1}{3} (1 - 0) - \frac{1}{4} (1 - 0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Pola figur nieograniczonych⁽⁶⁾



$$P_1 = \int_0^b f(x) dx =$$

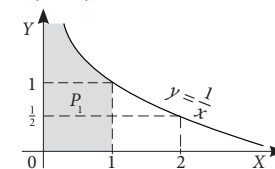
$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b f(x) dx \quad (7)$$



$$P_2 = \int_a^\infty f(x) dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

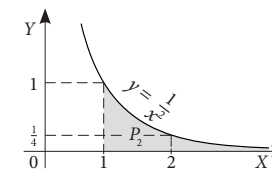
Przykłady



$$P_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln|x|]_a^1 =$$

$$= 0 + \infty = \infty$$

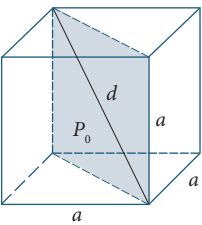
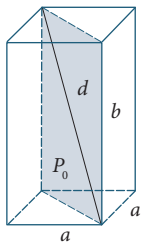
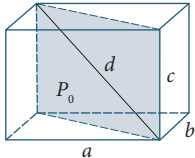
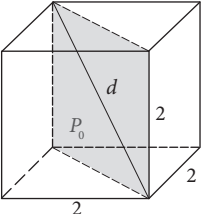
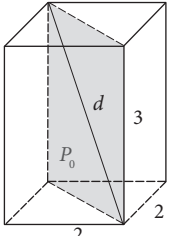
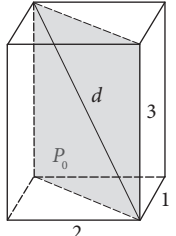


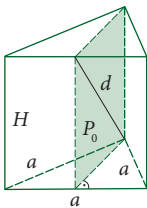
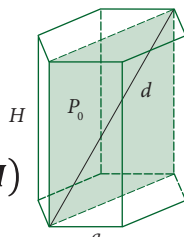
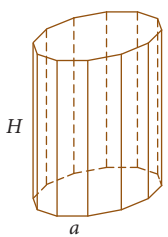
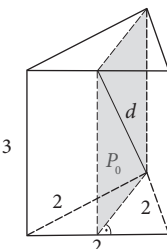
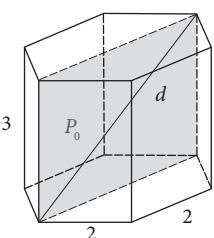
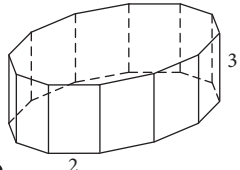
$$P_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b =$$

$$= 0 + 1 = 1 \quad (9)$$

(5/6) **Figura ograniczona/nieograniczona** płaska to taka, dla której istnieje/nie istnieje koło o skończonym promieniu zawierające tę figurę.
 (7) Gdy wykres funkcji zmierza asymptotycznie do osi OY z lewej strony, wówczas $P_1 = \int_0^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b f(x) dx \rightarrow$ **Granice funkcji w punkcie** → Temat 56
 (8) Gdy wykres funkcji zmierza asymptotycznie do zera w minus nieskończoności, wówczas $P_2 = \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \rightarrow$ **Granice funkcji w nieskończoności** → Temat 55
 (9) Wynik jest dość zaskakujący, gdyż okazuje się, że pole figury nieograniczonej (niezawierającej się w kole o skończonym promieniu) może być... skończone!
 Poleć książkę

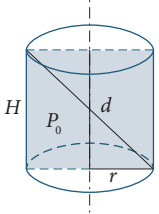
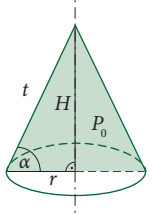
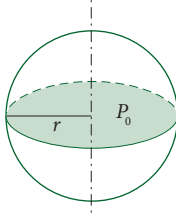
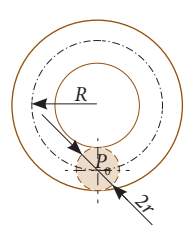
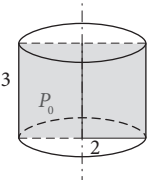
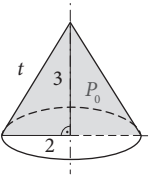
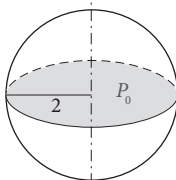
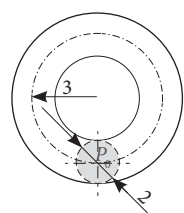
Gnaniastosłupy proste⁽¹⁾

Sześcian $d = \sqrt{3}a$ $P_p = a^2$ $P_0 = \sqrt{2}a^2$ $P = 6a^2$ $V = a^3$ 	Prostopadłościan prawidłowy⁽²⁾ czworokątny $d = \sqrt{2a^2 + b^2}$ $P_p = a^2$ $P_0 = \sqrt{2}ab$ $P = 2a(a + 2b)$ $V = a^2b$ 	Prostopadłościan $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $P_p = ab$ $P_0 = c\sqrt{a^2 + b^2}$ $P = 2(ab + bc + ac)$ $V = abc$ 
Przykład $d = 2\sqrt{3}$ $P_p = 4$ $P_0 = 4\sqrt{2}$ $P = 24$ $V = 8$ 	Przykład $d = \sqrt{17}$ $P_p = 4$ $P_0 = 6\sqrt{2}$ $P = 32$ $V = 12$ 	Przykład $d = \sqrt{14}$ $P_p = 18$ $P_0 = 3\sqrt{5}$ $P = 22$ $V = 6$ 

Gnaniastosłup prawidłowy⁽²⁾ trójkątny $d = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4H^2}$ $P_b = 3aH$ $P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $P_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}aH$ $P = \frac{1}{2}a(\sqrt{3}a + 6H)$ $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2H$ 	Gnaniastosłup prawidłowy⁽²⁾ sześciokątny $d = \sqrt{4a^2 + H^2}$ $P_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ $P_b = 6aH$ $P_0 = 2aH$ $P = 3a(\sqrt{3}a + 2H)$ $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2H$ 	Gnaniastosłup prawidłowy⁽²⁾ n-kątny $P_p = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$ $P_b = naH$ $P = 2P_p + P_b$ $V = P_pH$ 
Przykład $d = 2\sqrt{3}$ $P_p = \sqrt{3}$ $P_b = 18$ $P_0 = 3\sqrt{3}$ $P = 2\sqrt{3} + 18$ $V = 3\sqrt{3}$ 	Przykład $d = 5$ $P_p = 6\sqrt{3}$ $P_b = 36$ $P_0 = 12$ $P = 12\sqrt{3} + 36$ $V = 3\sqrt{3}$ 	Przykład $n = 12$ $P_b = 72$ $P_p = 12 \operatorname{ctg} 15^\circ = 12\sqrt{3} + 24$ $P = 24\sqrt{3} + 20$ $V = 36\sqrt{3} + 72$ 

(1) Tzn. krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.

Bryły obrotowe

Walec $H^2 + 4r^2 = d^2$ $P_p = \pi r^2$ $P_b = 2\pi rH$ $P_0 = 2rH$ $P = 2\pi r(H + r)$ $V = \pi r^2H$ 	Stożek $r = t \cos \alpha$ $H^2 + r^2 = t^2$ $P_p = \pi r^2$ $P_b = \pi r t$ $P_0 = rH$ $P = \pi r(r + t)$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2H$ 	Kula $P_0 = \pi r^2$ $P = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 	Torus $P_0 = \pi r^2$ $P = 4\pi^2 Rr$ $V = 2\pi^2 Rr^2$ 
Przykład $P_p = 4\pi$ $P_b = 12\pi$ $P_0 = 12$ $P = 20\pi$ $V = 12\pi$ 	Przykład $t = \sqrt{13}$ $P_p = 4\pi$ $P_b = 2\sqrt{13}\pi$ $P_0 = 6$ $P = 2(\sqrt{13} + 2)\pi$ $V = 4\pi$ 	Przykład $P_0 = 4\pi$ $P = 16\pi$ $V = \frac{16}{3}\pi$ 	Przykład $P_0 = \pi$ $P = 12\pi^2$ $V = 24\pi^2$ 

Ostrosłupy proste⁽³⁾

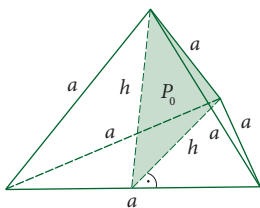
Czworościan

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$P_b = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$P_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$$



$$P = \sqrt{3}a^2$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Ostrosłup prawidłowy⁽²⁾ trójkątny

$$h = b \sin \alpha$$

$$H = b \sin \beta = h \sin \gamma$$

$$H^2 + \frac{1}{12}a^2 = h^2$$

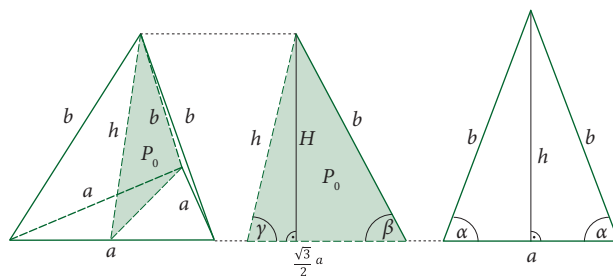
$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$P_b = \frac{3}{2}ah = \frac{3}{2}ab \sin \alpha$$

$$P_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}aH$$

$$P = a\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a + 3h\right)$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2H$$



Przykład

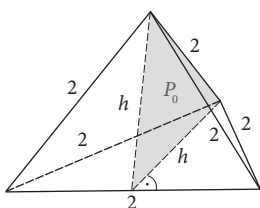
$$h = \sqrt{3}$$

$$P_p = \sqrt{3}$$

$$P_0 = \sqrt{2}$$

$$P = 4\sqrt{3}$$

$$V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



Przykład

$$h = \frac{2\sqrt{21}}{3} \quad b = \frac{\sqrt{93}}{3}$$

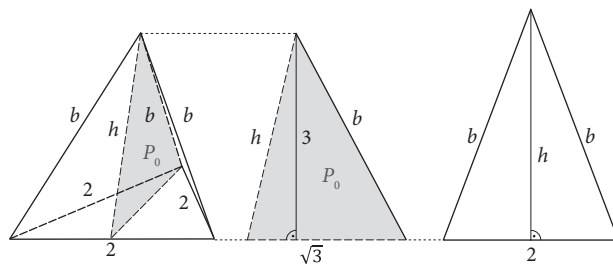
$$P_p = \sqrt{3}$$

$$P_b = 2\sqrt{21}$$

$$P_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$P = 4\sqrt{21} + \sqrt{3}$$

$$V = \sqrt{3}$$

Ostrosłup prawidłowy⁽²⁾ czworokątny (piramida)

$$H = b \sin \beta = h \sin \gamma$$

$$H^2 + \frac{1}{4}a^2 = h^2$$

$$H^2 + \frac{1}{2}a^2 = b^2$$

$$P_p = a^2$$

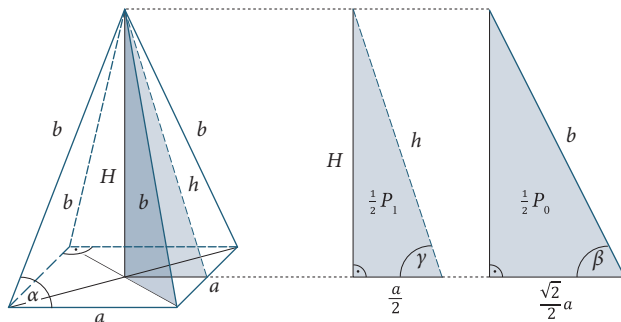
$$P_b = 2ah$$

$$P_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}aH$$

$$P_1 = \frac{1}{2}aH$$

$$P = a(a + 2h)$$

$$V = \frac{1}{3}a^2H$$

Ostrosłup prawidłowy⁽²⁾ n-kątny

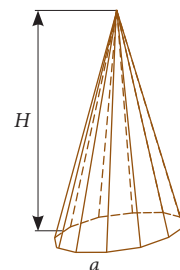
$$h^2 = H^2 + \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$P_p = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$P_b = \frac{nah}{2}$$

$$P = P_p + P_b$$

$$V = \frac{1}{3}P_pH$$



Przykład

$$h = \sqrt{10}$$

$$b = \sqrt{11}$$

$$P_p = 4$$

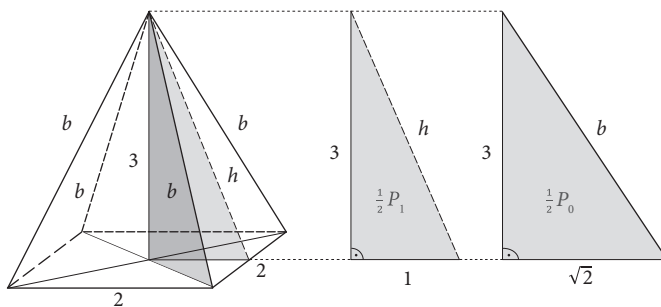
$$P_b = 4\sqrt{10}$$

$$P_0 = 3\sqrt{2}$$

$$P_1 = 3$$

$$P = 4\sqrt{10} + 4$$

$$V = 4$$



Przykład

$$n = 12$$

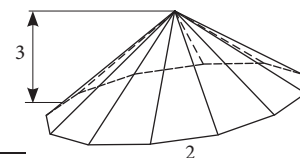
$$h = 2\sqrt{\sqrt{3} + 4}$$

$$P_p = 12 \operatorname{ctg} 15^\circ = 12\sqrt{3} + 24$$

$$P_b = 24\sqrt{\sqrt{3} + 4}$$

$$P = 24\sqrt{\sqrt{3} + 4} + 12\sqrt{3} + 24$$

$$V = 12\sqrt{3} + 24$$



Oznaczenia

a, b, c – długości krawędzi⁽⁴⁾
 n – liczba boków przystających⁽⁷⁾
 d – długość przekątnej przekroju⁽⁴⁾

α, β, γ – miary kątów⁽⁵⁾
 h – wysokość ściany bocznej⁽⁴⁾
 H – wysokość bryły⁽⁴⁾

P_p – pole powierzchni podstawy⁽⁶⁾
 P_b – pole powierzchni ścian bocznych⁽⁶⁾
 $P_{0/1}$ – pole powierzchni wybranego przekroju⁽⁶⁾

P – pole powierzchni całkowitej bryły⁽⁶⁾ V – objętość bryły⁽⁸⁾

(2) W podstawach są wielokąty foremne → Wielokąty foremne → Wybrane figury planimetrii → Temat 73

(3) Wszystkie krawędzie boczne są pod takimi samymi kątami do płaszczyzny podstawy.

(4) Wielkości w jednostkach długości, np. w metrach [m], decymetrach [dm], centymetrach [cm] itp. → Jednostki wielokrotne i podwielokrotne → Dodatki

(5) Wielkości w jednostkach miar kątów, np. w stopniach [°], gradusach [g] lub bezmianowe [radiany] → Miary kątowe → Kąty i trójkąty → Temat 71

(6) Wielkości w jednostkach pola, np. w metrach kwadratowych [m²], decymetrach kwadratowych [dm²], centymetrach kwadratowych [cm²] itp.

(7) Liczby niemianowane (bez jednostki).

(8) Wielkości w jednostkach objętości, np. w metrach sześciennech [m³], decymetrach sześciennech [dm³] (litrach), centymetrach sześciennech [cm³] (mililitrach) itp.

A

Alternatywa → [Temat 1](#)
 Argument funkcji → [Temat 14](#)
 Argument liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Asymptoty → [Temat 64](#)

B

Badanie funkcji → [Temat 64](#)
 Badanie funkcji wymiernych → [Temat 37](#)
 Badanie przebiegu zmienności wielomianów → [Temat 32](#)
 Badanie wielomianów → Badanie przebiegu zmienności wielomianów
 Błędy przybliżeń → [Temat 7](#)
 Bryły obrotowe → [Temat 74](#)
 Budowa twierdzenia → [Temat 1](#)

C

Całki nieoznaczone → [Temat 65](#)
 Całki oznaczone → [Temat 66](#)
 Całkowanie oznaczone przez części → [Temat 66](#)
 Całkowanie oznaczone przez podstawianie → [Temat 66](#)
 Całki podstawowe → [Temat 65](#)
 Całkowanie przez części → [Temat 65](#)
 Całkowanie przez podstawianie → [Temat 65](#)
 Cechy podzielności liczb całkowitych → [Temat 3](#)
 Ciąg malejący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg monotoniczny → [Temat 51](#)
 Ciąg monotoniczny na przedziałach → [Temat 51](#)
 Ciąg niemalejący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg nierosnący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg ograniczony → Własności ciągów liczbowych
 Ciąg okresowy → Własności ciągów liczbowych
 Ciąg rosnący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg rozbieżny → [Temat 52](#)
 Ciąg różnowartościowy → Własności ciągów liczbowych
 Ciąg stały → Ciąg monotoniczny
 Ciąg zbieżny → [Temat 52](#)
 Ciągi arytmetyczne → [Temat 53](#)
 Ciągi geometryczne → [Temat 53](#)
 Ciągi liczbowe → [Temat 51](#)
 Ciąg sum częściowych → Szeregi geometryczne
 Ciągi szczególne → [Temat 53](#)
 Ciągłość funkcji → [Temat 58](#)
 Ciągłość funkcji w punkcie → Ciągłość funkcji
 Cięciwa → [Temat 72](#)
 Cosecans → [Temat 43, 45](#)
 Cosinus → [Temat 43, 45](#)
 Cotangens → [Temat 43, 45](#)
 Część rzeczywista liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Część urojona liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Część wspólna zbiorów → Iloczyn zbiorów
 Czworokąt → [Temat 73](#)
 Czworoscian → [Temat 74](#)

D

Deltoid → [Temat 73](#)
 Długość wektora → [Temat 75](#)
 Dodawanie → Działania
 Dodawanie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Dodawanie macierzy → Działania na macierzach
 Dodawanie ułamków → Działania na ułamkach
 Dodawanie wielomianów → Działania na wielomianach
 Dopełnienie dopełnienia zbioru → [Temat 2](#)
 Dopełnienie iloczynu zbioru i jego dopełnienia → [Temat 2](#)
 Dopełnienie zbioru → [Temat 2](#)
 Dopełnienie iloczynu zbiorów → Prawa de Morgana
 Dopełnienie sumy zbiorów → Prawa de Morgana
 Doświadczenie losowe → [Temat 68](#)

Dowolna potęga różnicy → [Temat 10](#)
 Dowolna potęga sumy → [Temat 10](#)
 Działania → [Temat 8](#)
 Działania logiczne → [Temat 1](#)
 Działania na liczbach zespolonych → [Temat 11](#)
 Działania na macierzach → [Temat 19](#)
 Działania na ułamkach → [Temat 5](#)
 Działania na wektorach → [Temat 75](#)
 Działania na wielomianach → [Temat 29](#)
 Działania na zbiorach → [Temat 2](#)
 Dziedzina funkcji → [Temat 14, 64](#)
 Dzielenie → Działania
 Dzielenie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Dzielenie ułamków → Działania na ułamkach
 Dzielenie wielomianów → Działania na wielomianach

E

Eksperyment losowy → Doświadczenie losowe
 Ekstrema funkcji → [Temat 64](#)
 Ekstrema lokalne → [Temat 61](#)
 Element należący do zbioru → [Temat 2](#)
 Element nie należący do zbioru → [Temat 2](#)
 Element zbioru → [Temat 2](#)
 Elementy geometrii analitycznej → [Temat 79](#)
 Elementy statystyki → [Temat 70](#)
 Elementarne równania trygonometryczne → [Temat 46](#)
 Elipsa → [Temat 77, 78](#)

F

Fałsz → [Temat 1](#)
 Figury planimetrii → [Temat 73](#)
 Figury w kole → [Temat 72](#)
 Forma zdaniowa → [Temat 1](#)
 Funkcja zdaniowa → Forma zdaniowa
 Funkcja → Funkcje
 Funkcja liniowa z parametrem → [Temat 15](#)
 Funkcja malejąca → Własności funkcji
 Funkcja niemalejąca → Własności funkcji
 Funkcja nieparzysta → Własności funkcji
 Funkcja nierosnąca → Własności funkcji
 Funkcja odwrotna → Własności funkcji
 Funkcja odwzorowująca „na” → Własności funkcji
 Funkcja odwzorowująca „w” → Własności funkcji
 Funkcja ograniczona → Własności funkcji
 Funkcja okresowa → Własności funkcji
 Funkcja parzysta → Własności funkcji
 Funkcja pierwotna → Całki nieoznaczone
 Funkcja pierwszego stopnia → Funkcje liniowe
 Funkcja rosnąca → Własności funkcji
 Funkcja różniczkowalna → Różniczkowalność funkcji
 Funkcja różniczkowalna w przedziale → Różniczkowalność funkcji
 Funkcja różniczkowalna w punkcie → Różniczkowalność funkcji
 Funkcja różnowartościowa → Własności funkcji
 Funkcja stała → Funkcje liniowe, Własności funkcji
 Funkcja wielokrotnie złożona → [Temat 63](#)
 Funkcja wklęsła → Własności funkcji
 Funkcja wypukła → Własności funkcji
 Funkcje → [Temat 14](#)
 Funkcje homograficzne → [Temat 35](#)
 Funkcje kwadratowe → [Temat 24](#)
 Funkcje liniowe → [Temat 15](#)
 Funkcje logarytmiczne → [Temat 42](#)
 Funkcje „na” → [Temat 47](#)
 Funkcje odwrotne → [Temat 48](#)
 Funkcje potęgowe → [Temat 39](#)
 Funkcje trygonometryczne → [Temat 45](#)
 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta → [Temat 43](#)

Funkcje trygonometryczne kąta podwojonego → [Temat 44](#)
 Funkcje trygonometryczne połowy kąta → [Temat 44](#)
 Funkcje trygonometryczne sumy/różnicy kątów → [Temat 44](#)
 Funkcje „w” → [Temat 47](#)
 Funkcje wielomianowe → Wielomiany
 Funkcje wykładnicze → [Temat 40](#)
 Funkcje wymierne → [Temat 37](#)
 Funkcje z wartością bezwzględną → [Temat 50](#)

G

Geometria analityczna → Elementy geometrii analitycznej
 Gradus → Miara gradusowa kąta
 Gniastostup prawidłowy → [Temat 74](#)
 Gniastostup prawidłowy, trójkątny → [Temat 74](#)
 Granica iloczynu ciągów → Własności granic ciągu
 Granica iloczynu ciągu przez liczbę → Własności granic ciągu
 Granica ilorazu funkcji → Własności granic funkcji
 Granica ilorazu ciągów → Własności granic ciągu
 Granica ilorazu różnicowego → Pochodna funkcji w punkcie
 Granica ilorazu funkcji → Własności granic funkcji
 Granica różnicy ciągów → Własności granic ciągu
 Granica różnicy funkcji → Własności granic funkcji
 Granica sumy ciągów → Własności granic ciągu
 Granica sumy funkcji → Własności granic funkcji
 Granica właściwa ciągu liczbowego → Granice ciągów
 Granice ciągów → [Temat 52](#)
 Granice funkcji → [Temat 64](#)
 Granice funkcji lewostronne w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji niewłaściwe → [Temat 55](#)
 Granice funkcji niewłaściwe w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji obustronne w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji prawostronne w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji w minus nieskończoności → [Temat 55](#)
 Granice funkcji w punkcie → [Temat 56](#)
 Granice funkcji w nieskończoności → [Temat 55](#)
 Granice funkcji właściwe → [Temat 55](#)
 Granice funkcji właściwe w punkcie → Granice funkcji w punkcie

H

Hierarchia inkluzji zbiorów liczbowych → [Temat 8](#)
 Hiperbola → [Temat 77, 78](#)

I

Iloczyn kartezjański → Produkt kartezjański
 Iloczyn skalarny wektorów → Działania na wektorach
 Iloczyn wektora przez liczbę → Działania na wektorach
 Iloczyn zbiorów → [Temat 2](#)
 Iloczyn zdarzeń losowych → [Temat 68](#)
 Iloraz ciągu geometrycznego → [Temat 53](#)
 Iloraz różnicowy → [Temat 59](#)
 Implikacja → [Temat 1](#)
 Indukcja matematyczna → [Temat 3, 4](#)
 Indukcja zupełna → Indukcja matematyczna
 Infimum → Kresy zbiorów
 Inkluzja zbiorów → [Temat 2](#)
 Inkluzja zbiorów liczbowych → Hierarchia inkluzji zbiorów liczbowych
 Inkluzja zdarzeń losowych → Zdarzenie losowe pociągające inne zdarzenie
 Interpretacja geometryczna liczb zespolonych → [Temat 11](#)
 Interpretacje geometryczne szeregów geometrycznych, zbieżnych → [Temat 54](#)
 Interpretacja graficzna całek oznaczonych → [Temat 66](#)
 Interpretacja graficzna pochodnej funkcji w punkcie → [Temat 59](#)
 Interpretacja graficzna równań i nierówności wymiernych → [Temat 38](#)
 Interpretacja graficzna różniczkowości → [Temat 60](#)
 Interpretacja graficzna wektora → [Temat 75](#)
 Interpretacje graficzne opisu prostych → [Temat 76](#)
 Izometria → Przekształcenie izometryczne płaszczyzny

J

Jednokładności → [Temat 80](#)
 Jednokładność → Jednokładności
 Jednostka urojona → [Temat 11](#)
 Jedynek trygonometryczna → [Temat 44](#)
 Język prawdopodobieństwa → [Temat 68](#)

K

Kąt nachylenia prostej → [Temat 15](#)
 Kąt środkowy → [Temat 72](#)
 Kąt wpisany → [Temat 72](#)
 Kąty → [Temat 71](#)
 Kąty w okręgu/kole → [Temat 72](#)
 Klasy abstrakcji → [Temat 13](#)
 Koło → [Temat 72, 73](#)
 Kombinacja → [Temat 67](#)
 Kombinacja liniowa wersorów → [Temat 75](#)
 Kombinatoryka → [Temat 67](#)
 Koniunkcja → [Temat 1](#)
 Kontrapozycja twierdzenia → [Temat 1](#)
 Kresy zbiorów → [Temat 7](#)
 Krotność pierwiastka wielomianu → [Temat 30](#)
 Krzywe stożkowe → [Temat 77, 78](#)
 Kula → [Temat 74](#)
 Kwadrat → [Temat 73](#)
 Kwadrat różnicy → [Temat 10](#)
 Kwadrat sumy → [Temat 10](#)
 Kwantyfikator duży → Kwantyfikatory
 Kwantyfikator mały → Kwantyfikatory
 Kwantyfikator ogólny → Kwantyfikatory
 Kwantyfikator szczegółowy → Kwantyfikatory
 Kwantyfikatory → [Temat 1](#)

L

Liczba e → [Temat 7](#)
 Liczba Nepera → Liczba e
 Liczba pi → [Temat 7](#)
 Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych → [Temat 68](#)
 Liczba wszystkich zdarzeń losowych → [Temat 68](#)
 Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia → [Temat 68](#)

Liczby całkowite → [Temat 3](#)
 Liczby naturalne → [Temat 3](#)
 Liczby niewymierne → [Temat 7](#)
 Liczby pierwsze → [Temat 3](#)
 Liczby rzeczywiste → [Temat 8](#)
 Liczby wymierne → [Temat 5](#)
 Liczby zespolone → [Temat 11](#)
 Logarytmowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Logarytmy → [Temat 41](#)
 Logika → Rachunek zdań

Ł

Łączność alternatywy → [Temat 2](#)
 Łączność koniunkcji → [Temat 2](#)

M

Macierz dopełnień algebraicznych → [Temat 19](#)
 Macierz jednostkowa → [Temat 19](#)
 Macierz kwadratowa → [Temat 19](#)
 Macierz odwrotna → [Temat 19](#)
 Macierz transponowana → [Temat 19](#)
 Macierz uzupełniona → [Temat 22](#)
 Macierze → [Temat 19](#)
 Maksimum → [Temat 7](#)
 Maksimum lokalne funkcji → Ekstrema lokalne
 Metoda grupowania → [Temat 33](#)

Metoda macierzowa rozwiązywania układów Cramera → [Temat 21](#)
 Metoda wyznacnikowa rozwiązywania układów Cramera → [Temat 21](#)
 Miara gradusowa kąta → [Temat 71](#)
 Miara kąta między prostymi → [Temat 76](#)
 Miara łukowa kąta → [Temat 71](#)
 Miara stopniowa kąta → [Temat 71](#)
 Miary kątowe → [Temat 71](#)
 Miejsce zerowe → [Temat 14](#)
 Minimum → [Temat 7](#)
 Minimum lokalne funkcji → Ekstrema lokalne
 Minor macierzy → [Temat 20](#)
 Mnożenie → Działania
 Mnożenie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Mnożenie macierzy przez liczbę → Działania na macierzach
 Mnożenie macierzy przez macierz → Działania na macierzach
 Mnożenie ułamków → Działania na ułamkach
 Mnożenie wielomianów → Działania na wielomianach
 Moc przestrzeni zdarzeń elementarnych → [Temat 68](#)
 Moc zdarzenia losowego → [Temat 68](#)
 Moduł liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Moduł wektora → Długość wektora
 Moivre'a wzory → Wzory de Moivre'a
 Monotoniczność funkcji → [Temat 47, 61, 64](#)
 Monotoniczność funkcji logarytmicznych
 → Własności funkcji logarytmicznych
 Monotoniczność funkcji potęgowych → Własności funkcji potęgowych
 Monotoniczność funkcji trygonometrycznych w przedziałach
 → [Temat 45](#)
 Monotoniczność funkcji wykładniczych
 → Własności funkcji wykładniczych

N

Nadzbiór zbioru → Zbiór zawierający się w innym zbiorze
 Nadzieja matematyczna → Wartość oczekiwana
 Najmniejsza wspólna wielokrotność → [Temat 3](#)
 Największy wspólny podzielnik → [Temat 3](#)
 Negacja → Zaprzeczenie
 Negacja alternatywy → Prawa de Morgana
 Negacja koniunkcji → Prawa de Morgana
 Nierówności homograficzne → [Temat 36](#)
 Nierówności kwadratowe → [Temat 26](#)
 Nierówności kwadratowe z parametrem → [Temat 28](#)
 Nierówności liniowe z jedną niewiadomą → [Temat 16](#)
 Nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)
 Nierówności logarytmiczne → [Temat 42](#)
 Nierówności trygonometryczne → [Temat 46](#)
 Nierówności wielomianowe → [Temat 34](#)
 Nierówności wykładnicze → [Temat 40](#)
 Nierówności wymierne → [Temat 38](#)
 Nierówność liniowa z jedną niewiadomą → Nierówności liniowe
 Nierówność liniowa z parametrem → [Temat 16](#)
 Nierówność pierwszego stopnia → Nierówności liniowe
 Nierówność sprzeczna → [Temat 16, 34](#)
 Nierówność tożsamościowa → [Temat 16, 34](#)

O

Obraz dziedziny funkcji → [Temat 14](#)
 Obroty → [Temat 80](#)
 Odchylenie standardowe → [Temat 70](#)
 Odcinek koła → [Temat 72, 73](#)
 Odejmowanie → Działania
 Odejmowanie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Odejmowanie macierzy → Działania na macierzach
 Odejmowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Odejmowanie wielomianów → Działania na wielomianach
 Odległość między punktami → [Temat 79](#)
 Odległość punktu od prostej → [Temat 76, 79](#)

Odwracalność funkcji → [Temat 47](#)
 Ograniczenia zbiorów → [Temat 7](#)
 Ograniczoność funkcji → [Temat 47](#)
 Ograniczoność funkcji trygonometrycznych
 → Własności funkcji trygonometrycznych
 Okrąg → [Temat 72, 77, 78](#)
 Okrąg opisany na czworokącie → [Temat 72](#)
 Okrąg opisany na trójkącie → [Temat 72](#)
 Okrąg wpisany w czworokąt → [Temat 72](#)
 Okrąg wpisany w trójkąt → [Temat 72](#)
 Okresowość funkcji → [Temat 47](#)
 Okresowość funkcji trygonometrycznych
 → Własności funkcji trygonometrycznych
 Operacje na ułamkach → [Temat 5](#)
 Opis słowny funkcji → Sposoby opisu funkcji
 Opis wektora → [Temat 75](#)
 Opis werbalny funkcji → Sposoby opisu funkcji
 Opisy ciągów liczbowych → [Temat 51](#)
 Ostrosłup prawidłowy → [Temat 74](#)
 Ostrosłup prawidłowy, czworokątny → [Temat 74](#)
 Ostrosłup prawidłowy, trójkątny → [Temat 74](#)
 Ostrosłupy proste → [Temat 74](#)
 Ośmiokąt foremny → [Temat 73](#)
 Otoczenie punktu → [Temat 59](#)

P

Para uporządkowana → [Temat 13](#)
 Parabola → Wykresy funkcji kwadratowych, → [Temat 77, 78](#)
 Parzystość funkcji potęgowych → Własności funkcji potęgowych
 Parzystość funkcji trygonometrycznych
 → Własności funkcji trygonometrycznych
 Permutacja → [Temat 67](#)
 Pęk prostych → [Temat 79](#)
 Pierścień → [Temat 72, 73](#)
 Pierwiastek arytmetyczny → [Temat 8](#)
 Pierwiastek podwójny wielomianu
 → Pierwiastek wielokrotny wielomianu
 Pierwiastek pojedynczy wielomianu
 → Pierwiastek wielokrotny wielomianu
 Pierwiastek potrójny wielomianu
 → Pierwiastek wielokrotny wielomianu
 Pierwiastek wielokrotny wielomianu → [Temat 30](#)
 Pierwiastek z liczby ujemnej → [Temat 8](#)
 Pierwiastki → [Temat 9](#)
 Pierwiastki całkowite i wymierne wielomianów
 → Pierwiastki wielomianów
 Pierwiastki równania kwadratowego → [Temat 25](#)
 Pierwiastki wielomianów → [Temat 30](#)
 Pierwiastkowanie liczb zespolonych → Wzory de Moivre'a
 Pierwiastkowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Pięciokąt foremny → [Temat 73](#)
 Piramida → Ostrosłup prawidłowy, czworokątny
 Planimetria → Wybrane figury planimetrii
 Pochodna funkcji jako funkcja → Pochodne funkcji
 Pochodna funkcji w punkcie → [Temat 59](#)
 Pochodne funkcji → [Temat 61, 64](#)
 Pochodne funkcji cyklometrycznych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji elementarnych → [Temat 62](#)
 Pochodne funkcji logarytmicznych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji nieelementarnych → [Temat 63](#)
 Pochodne funkcji odwrotnych → [Temat 63](#)
 Pochodne funkcji potęgowych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji trygonometrycznych
 → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji wielomianowych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji wykładniczych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji wymiernych → Pochodne funkcji elementarnych

Pochodne funkcji złożonych → [Temat 63](#)
 Pochodne iloczynu funkcji → [Temat 63](#)
 Pochodne ilorazu funkcji → [Temat 63](#)
 Pochodne różnicy funkcji → [Temat 63](#)
 Pochodne sumy funkcji → [Temat 63](#)
 Podmacierz → [Temat 20](#)
 Podobieństwo trójkątów → [Temat 71](#)
 Podstawowe wzory logarytmiczne → [Temat 41](#)
 Podzbiór zbioru → Zbiór zawierający się w innym zbiorze
 Pojęcia trygonometryczne → [Temat 43](#)
 Pola figur pod krzywymi → Interpretacja graficzna całek oznaczonych
 Pole trójkąta → [Temat 71](#)
 Postać iloczynowa funkcji kwadratowych → [Temat 24](#)
 Postać kanoniczna funkcji homograficznych → Funkcje homograficzne
 Postać kanoniczna funkcji kwadratowych → [Temat 24](#)
 Postać kanoniczna liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Postać kierunkowa prostej → [Temat 15, 76](#)
 Postać odcinkowa prostej → [Temat 76](#)
 Postać ogólna funkcji homograficznych → Funkcje homograficzne
 Postać ogólna funkcji kwadratowych → [Temat 24](#)
 Postać ogólna funkcji potęgowych → Funkcje potęgowe
 Postać ogólna funkcji wymiernych → Funkcje wymierne
 Postać ogólna nierówności wielomianowych
 → Nierówności wielomianowe
 Postać ogólna prostej → [Temat 17, 76](#)
 Postać ogólna półpłaszczyzny → [Temat 17](#)
 Postać ogólna równań wielomianowych → Równania wielomianowe
 Postać ogólna strony prostej → [Temat 17](#)
 Postać parametryczna prostej → [Temat 76](#)
 Postać trygonometryczna liczb zespolonych → [Temat 11](#)
 Postać wyznacznikowa prostej → [Temat 76](#)
 Potęga → [Temat 8, 9](#)
 Potęgi → [Temat 9](#)
 Potęgowanie liczb zespolonych → Wzory de Moivre'a
 Potęgowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Powinowactwa → [Temat 80](#)
 Powinowactwa wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji
 Powinowactwo prostokątne → Powinowactwa
 Półpłaszczyzna → [Temat 17](#)
 Prawa de Morgana → [Temat 2](#)
 Prawda → [Temat 1](#)
 Prawdopodobieństwo → [Temat 68, 69](#)
 Prawdopodobieństwo całkowite → [Temat 69](#)
 Prawdopodobieństwo klasyczne → Prawdopodobieństwo
 Prawdopodobieństwo warunkowe → [Temat 69](#)
 Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego → Prawdopodobieństwo
 Prawo logiczne → [Temat 1](#)
 Prawo podwójnego zaprzeczenia → [Temat 2](#)
 Prawo sprzeczności → [Temat 2](#)
 Prawo wyłączonego środka → [Temat 2](#)
 Prawo zaprzeczenia implikacji → [Temat 2](#)
 Procent składany → [Temat 6](#)
 Procenty → [Temat 6](#)
 Produkt kartezjański → [Temat 13](#)
 Promień → [Temat 6](#)
 Proporcjonalność prosta → Funkcje liniowe
 Prosta → [Temat 17](#), → Proste na płaszczyźnie
 Prosta przechodząca przez dwa punkty → [Temat 79](#)
 Proste → [Temat 79](#)
 Proste i punkty → Punkty i proste
 Proste i wektory → [Temat 79](#)
 Proste na płaszczyźnie → [Temat 76](#)
 Proste w postaci kierunkowej → [Temat 79](#)
 Proste w postaci ogólnej → [Temat 79](#)
 Prostokąt → [Temat 73](#)
 Prostopadłościan → [Temat 74](#)
 Prostopadłościan prawidłowy, czworokątny → [Temat 74](#)

Prostopadłość wektorów → [Temat 75](#)
 Przeciwdziedzina funkcji → [Temat 14](#)
 Przedział domknięty → Przedziały liczbowe
 Przedział lewostronnie domknięty → Przedziały liczbowe
 Przedział otwarty → Przedziały liczbowe
 Przedział prawostronnie domknięty → Przedziały liczbowe
 Przedziały liczbowe → [Temat 8](#)
 Przedziały nieograniczone → Przedziały liczbowe
 Przekroje stożka → [Temat 78](#)
 Przekrój zdarzeń losowych → Iloczyn zdarzeń losowych
 Przekształcenia płaszczyzny → [Temat 80](#)
 Przekształcenia wykresów funkcji → [Temat 49](#)
 Przekształcenie izometryczne płaszczyzny → [Temat 80](#)
 Przemienność alternatywy → [Temat 2](#)
 Przemienność iloczynu zbiorów → [Temat 2](#)
 Przemienność koniunkcji → [Temat 2](#)
 Przemienność sumy zbiorów → [Temat 2](#)
 Przesunięcia → [Temat 80](#)
 Przesunięcia wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji
 Przestrzeń → [Temat 2](#)
 Przestrzeń zdarzeń elementarnych → [Temat 68](#)
 Przybliżenia liczb → [Temat 7](#)
 Przypadki szczególne funkcji kwadratowych → [Temat 23](#)
 Punkty → [Temat 79](#)
 Punkty i proste → [Temat 79](#)
 Punkty przegięcia funkcji → [Temat 61, 64](#)

R

Rachunek zbiorów → [Temat 2](#)
 Rachunek zdań → [Temat 1](#)
 Radian → Miara łukowa kąta
 Reguła de l'Hospitala → [Temat 57](#)
 Relacja → Relacje
 Relacja liniowego porządku → Własności relacji
 Relacja równoważności → Własności relacji
 Relacje → [Temat 13](#)
 Relacje na zbiorach → [Temat 2](#)
 Reszta z dzielenia wielomianu → [Temat 31](#)
 Romb → [Temat 73](#)
 Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji → [Temat 2](#)
 Rozdzielność iloczyn względem sumy zbiorów → [Temat 2](#)
 Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy → [Temat 2](#)
 Rozdzielność sumy względem iloczynu zbiorów → [Temat 2](#)
 Rozkład asymetryczny → Rozkład dwumianowy
 Rozkład Bernoulliego → Rozkład dwumianowy
 Rozkład dwumianowy → [Temat 70](#)
 Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze → [Temat 3](#)
 Rozkład symetryczny → Rozkład dwumianowy
 Rozkład wielomianu → Twierdzenie o rozkładzie wielomianu
 Rozkład zmiennej losowej → [Temat 70](#)
 Rozszerzanie ułamków → Operacje ułamkach
 Rozwiązanie nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)
 Rozwiązanie równania kwadratowego → [Temat 25](#)
 Rozwiązanie równania liniowego z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)
 Rozwiązanie równań i nierówności homograficznych → [Temat 36](#)
 Rozwiązanie równań i nierówności wymiernych → [Temat 38](#)
 Rozwiązanie równań zespolonych → [Temat 12](#)
 Rozwiązanie układów równań liniowych 2 na 2 → [Temat 18](#)
 Równania algebraiczne → Równania wielomianowe
 Równania kwadratowe → [Temat 25](#)
 Równania kwadratowe na dziedzinie zespolonej → Równania zespolone
 Równania kwadratowe z parametrem → [Temat 28](#)
 Równania kwadratowe ze zmienną zespoloną → Równania zespolone
 Równania kwadratowe, zespolone → Równania zespolone
 Równania liniowe → [Temat 16](#)
 Równania liniowe z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)
 Równania liniowe z jedną niewiadomą → [Temat 16](#)

Równania liniowe z parametrem → [Temat 16](#)

Równania logarytmiczne → [Temat 42](#)

Równania nieoznaczone → [Temat 16](#)

Równania homograficzne → [Temat 36](#)

Równania oznaczone → [Temat 16](#)

Równania pierwszego stopnia → Równania liniowe

Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą →

Równania liniowe

Równania sprzeczne → [Temat 16](#)

Równania tożsamościowe → [Temat 16](#)

Równanie tożsamościowe → [Temat 33](#)

Równania trygonometryczne → [Temat 46](#)

Równania wielomianowe → [Temat 33](#)

Równania wykładnicze → [Temat 40](#)

Równania wymierne → [Temat 38](#)

Równania zespolone → [Temat 12](#)

Równoległobok → [Temat 73](#)

Równoległość wektorów → [Temat 75](#)

Równość wektorów → [Temat 75](#)

Równość zbiorów → [Temat 2](#)

Równoważność → [Temat 1](#)

Różnica ciągu arytmetycznego → [Temat 53](#)

Różnica kwadratów → [Temat 10](#)

Różnica wektorów → Działania na wektorach

Różnica zbiorów → [Temat 2](#)

Różnica zdarzeń losowych → [Temat 68](#)

Różnice funkcji trygonometrycznych → [Temat 44](#)

Różniczkowalność funkcji → [Temat 60](#)

Różniczkowalność funkcji w punkcie → [Temat 59](#)

Różniczkowalność jednostronna funkcji w punkcie → [Temat 60](#)

Różniczkowalność lewostronna funkcji w punkcie → [Temat 60](#)

Różniczkowalność prawostronna funkcji w punkcie → [Temat 60](#)

Różnowartościowość funkcji → [Temat 47](#)

S

Sąsiedztwo lewostronne punktu → Sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwo prawostronne punktu → Sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwo punktu → [Temat 56](#)

Schemat Hornera → [Temat 33](#)

Schemat rozwiązywania zadań z kombinatoryki → [Temat 67](#)

Schemat rozwiązywania zadań z prawdopodobieństwa → [Temat 69](#)

Secans → [Temat 43, 45](#)

Silnia → [Temat 67](#)

Sinus → [Temat 43, 45](#)

Skracanie ułamków → Operacje ułamkach

Sposoby opisu funkcji → [Temat 14](#)

Sprowadzanie wielomianów do postaci iloczynowej → [Temat 33](#)

Stereometria → Wybrane figury stereometrii

Stopień → Miara stopniowa kąta

Stopień równania wielomianowego → [Temat 33](#)

Stożek → [Temat 74](#)

Strona prostej → [Temat 17](#)

Styczna do wykresu funkcji → [Temat 59](#)

Suma kwadratów → [Temat 10](#)

Suma → początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego → [Temat 53](#)

Suma → początkowych wyrazów ciągu geometrycznego → [Temat 53](#)

Suma nieskończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego → [Temat 53](#)

Suma nieskończonej liczby wyrazów ciągu geometrycznego → [Temat 53](#)

Suma wektorów → Działania na wektorach

Suma zbiorów → [Temat 2](#)

Suma zbioru i jego dopełnienia → [Temat 2](#)

Suma zdarzeń losowych → [Temat 68](#)

Sumy funkcji trygonometrycznych → [Temat 44](#)

Superpozycja funkcji → [Temat 63](#)

Supremum → Kresy zbiorów

Symbol Newtona → [Temat 67](#)

Symbole granic ciągów → [Temat 52](#)

Symbole granic funkcji → [Temat 57](#)

Symetria osiowa → Powinowactwa

Symetria środkowa → Jednokładności

Symetrie funkcji logarytmicznych →

Własności funkcji logarytmicznych

Symetrie funkcji wykładniczych → Własności funkcji wykładniczych

Symetrie wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji

Szeregi geometryczne → [Temat 54](#)

Sześcian → [Temat 74](#)

Sześcian różnicy → [Temat 10](#)

Sześcian sumy → [Temat 10](#)

Sześcioąt foremny → [Temat 73](#)

Ś

Średnica → [Temat 72](#)

T

Tabela funkcji → Sposoby opisu funkcji, → Badanie funkcji

Tabela pojęć i symboli z prawdopodobieństwa → [Temat 68](#)

Tangens → [Temat 43, 45](#)

Tautologia → [Temat 1](#)

Teza → [Temat 1](#)

Torus → [Temat 74](#)

Tożsamości trygonometryczne → [Temat 44](#)

Transformacje wzorów funkcji homograficznych → [Temat 35](#)

Translacja → Przesunięcia

Translacje wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji

Translacje wykresów funkcji homograficznych → [Temat 35](#)

Trapez → [Temat 73](#)

Trójkąt → [Temat 71, 73](#)

Trójkąt Pascala → [Temat 10, 67](#)

Trójkąt prostokątny → [Temat 73](#)

Trójkąt równoboczny → [Temat 73](#)

Trójkąt równoramienny → [Temat 73](#)

Trójkąty podobne → Podobieństwo trójkątów

Trygonometria → [Temat 43, 44, 45, 46](#)

Twierdzenia na indukcję, geometryczne → [Temat 4](#)

Twierdzenia na indukcję z podzielnością → [Temat 4](#)

Twierdzenia na indukcję z sumami ciągów → [Temat 4](#)

Twierdzenia o wielomianach → [Temat 31](#)

Twierdzenie → Budowa twierdzenia

Twierdzenie Bézouta → [Temat 31](#)

Twierdzenie cosinusów → [Temat 71](#)

Twierdzenie Kroneckera-Capelli → [Temat 22](#)

Twierdzenie o postaci iloczynowej wielomianu → [Temat 30](#)

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu → [Temat 31](#)

Twierdzenie odwrotne → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie Pitagorasa → [Temat 71](#)

Twierdzenie proste → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie przeciwne → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie przeciwstawne → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie sinusów → [Temat 71](#)

Twierdzenie Talesa → [Temat 71](#)

U

Układ nieoznaczony → [Temat 18, 22](#)

Układ niesprzeczny → [Temat 22](#)

Układ oznaczony → [Temat 18, 21, 22](#)

Układ sprzeczny → [Temat 18, 22](#)

Układ tożsamościowy → Układ nieoznaczony

Układy Cramera → [Temat 21](#)

Układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi → [Temat 18](#)

Układy n równań z n niewiadomymi → Układy Cramera

Układy równań Cramera → Układy Cramera

Układy równań liniowych → [Temat 22](#)

Ułamki dziesiętne → [Temat 5](#)

Ułamki okresowe → [Temat 5](#)

Ułamki zwykłe → Liczby wymierne

Usuwanie niewymierności z mianownika → [Temat 7](#)

W

Walec → [Temat 74](#)

Wariacja bez powtórzeń → [Temat 67](#)

Wariacja z powtórzeniami → [Temat 67](#)

Wariancja zmiennej losowej → [Temat 70](#)

Wartości trygonometryczne wybranych kątów → [Temat 43](#)

Wartość bezwzględna → [Temat 8](#)

Wartość funkcji → [Temat 14](#)

Wartość oczekiwana → [Temat 70](#)

Wartość średnia → Wartość oczekiwana

Wartość przeciętna → Wartość oczekiwana

Warunek prostopadłości prostych → [Temat 79](#)

Warunek równoległości prostych → [Temat 79](#)

Wektor → [Temat 75](#)

Wektor jednostkowy → Wersory

Wektor prostopadły do prostej → [Temat 76, 79](#)

Wektor równoległy do prostej → [Temat 76, 79](#)

Wektory na płaszczyźnie → [Temat 75](#)

Wektor normalny do prostej → Wektor prostopadły do prostej

Wektor zerowy → [Temat 75](#)

Wektory i proste → Proste i wektory

Wersory → [Temat 75](#)

Wielokąt foremny → [Temat 73](#)

Wielomian zerowy → [Temat 29](#)

Wielomiany → [Temat 29](#)

Wielomiany w postaci iloczynowej → [Temat 30](#)

Wielomiany w postaci ogólnej → [Temat 29](#)

Własności całek → [Temat 65](#)

Własności całek oznaczonych → [Temat 66](#)

Własności ciągów liczbowych → [Temat 51](#)

Własności funkcji → [Temat 47](#)

Własności funkcji logarytmicznych → [Temat 42](#)

Własności funkcji potęgowych → [Temat 39](#)

Własności funkcji trygonometrycznych → [Temat 45](#)

Własności funkcji wykładniczych → [Temat 40](#)

Własności granic ciągu → [Temat 52](#)

Własności granic funkcji → [Temat 57](#)

Własności logarytmów → [Temat 41](#)

Własności prawdopodobieństwa → [Temat 69](#)

Własności relacji → [Temat 13](#)

Własności symbolu Newtona → Symbol Newtona

Własności wyznaczników → [Temat 20](#)

Włączanie całości do ułamka → Operacje ułamkach

Współczynnik kierunkowy prostej → [Temat 15, 76, 79](#)

Współczynnik kierunkowy wektora → [Temat 75](#)

Wybrane figury planimetrii → [Temat 73](#)

Wybrane figury stereometrii → [Temat 74](#)

Wybrane granice ciągów liczbowych → [Temat 52](#)

Wybrane granice funkcji → [Temat 57](#)

Wycinek koła → [Temat 72, 73](#)

Wykonalność działań → [Temat 8](#)

Wykres ciągu liczbowego → [Temat 51](#)

Wykres dyskretny → Wykres ciągu liczbowego

Wykres funkcji → Sposoby opisu funkcji, → [Temat 64](#)

Wykres funkcji liniowej → [Temat 15](#)

Wykres nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)

Wykres równań liniowych z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)

Wykresy funkcji kwadratowych → [Temat 24, 27](#)

Wykresy funkcji odwrotnych → [Temat 48](#)

Wykresy funkcji potęgowych → [Temat 39](#)

Wykresy funkcji wymiernych → [Temat 37](#)

Wykresy wielomianów → [Temat 32, 34](#)

Wykresy wielomianów z dokładnością do znaków → [Temat 34](#)

Wylączanie całości przed ułamek → Operacje ułamkach

Wypukłość funkcji → [Temat 47, 61, 64](#)

Wyraz wolny → [Temat 15](#)

Wyznacznik 2 na 2 → [Temat 18](#)

Wyznacznik macierzy kwadratowej → Wyznaczniki

Wyznaczniki → [Temat 20](#)

Wzory funkcji odwrotnych → [Temat 48](#)

Wzory de Moivre'a → [Temat 11](#)

Wzory redukcyjne → [Temat 45](#)

Wzory Viète'a → [Temat 24](#)

Wzór dwumianowy Newtona → [Temat 10](#)

Wzór funkcji → Sposoby opisu funkcji

Wzajemne położenie okręgów → [Temat 72](#)

Wzór Herona → Pole trójkąta

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego → [Temat 53](#)

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego → [Temat 53](#)

Wzór na n -ty wyraz ciągu liczbowego → Opisy ciągów liczbowych

Wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego → [Temat 53](#)

Wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego → [Temat 53](#)

Wzór rekurencyjny ciągu liczbowego → Opisy ciągów liczbowych

Z

Zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym → [Temat 43](#)

Założenie → [Temat 1](#)

Zamiana postaci prostych → [Temat 79](#)

Zaprzeczenie → [Temat 1](#)

Zaprzeczenie kwantyfikatora → [Temat 1](#)

Zasada indukcji → Indukcja matematyczna

Zawieranie się zbiorów → Inkluzja zbiorów

Zbieżność szeregu geometrycznego → [Temat 54](#)

Zbiór → [Temat 2](#)

Zbiór jednoelementowy → [Temat 2](#)

Zbiór skończony → [Temat 2](#)

Zbiór nieskończony, przeliczalny → [Temat 2](#)

Zbiór pusty → [Temat 2](#)

Zbiór wartości funkcji → [Temat 14](#)

Zbiór zawierający się w innym zbiorze → [Temat 2](#)

Zbiór zdarzeń elementarnych → [Temat 68](#)

Zdania logiczne → [Temat 1](#)

Zdania proste → Zdania logiczne

Zdania złożone → Zdania logiczne

Zdarzenia losowe wykluczające się → [Temat 68](#)

Zdarzenie elementarne → [Temat 68](#)

Zdarzenie elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia losowego

→ [Temat 68](#)

Zdarzenie losowe → [Temat 68](#)

Zdarzenie losowe pociągające inne zdarzenie losowe → [Temat 68](#)

Zdarzenie losowe przeciwne → [Temat 68](#)

Zdarzenie niemożliwe → [Temat 68](#)

Zdarzenie pewne → [Temat 68](#)

Złożenie funkcji → [Temat 63](#)

Zmiana podstawy logarytmu → Własności logarytmów

Zmienna losowa → [Temat 70](#)

Zmienna losowa dyskretna → Zmienna losowa

Zmienna losowa skokowa → Zmienna losowa

Zmienna niezależna → [Temat 14](#)

Zmienna zależna → [Temat 14](#)

Znaki funkcji trygonometrycznych w przedziałach → [Temat 45](#)

Związki między funkcjami trygonometrycznymi → [Temat 44](#)

Związki między rachunkiem zdań, a rachunkiem zbiorów → [Temat 2](#)

PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA
Helion 

ATLAS MATEMATYCZNY

Twój przewodnik po krainie matematyki

- Przygotowujesz się do matury lub egzaminu?
- Chcesz szybko i sprawnie powtórzyć materiał?
- Nie lubisz wertować opastych podręczników?

Ta książka jest właśnie dla Ciebie!

Atlas matematyczny to kompendium wiedzy matematycznej na poziomie szkoły średniej, w którym łatwo i szybko znajdziesz wszelkie potrzebne Ci informacje. Na stosunkowo niewielu stronach zgromadzono tu cały materiał niezbędny, aby osiągnąć prawdziwe mistrzostwo w matematyce.

Bogata treść, zwarta forma, praktyczne przykłady zastosowań — wszystko to sprawi, że ten atlas stanie się nieodzowną pomocą w szkole, w trakcie przygotowań do matury z matematyki, a nawet w czasie pierwszych lat studiów. Poza uczniami i studentami z przyjemnością zajrzą do tej publikacji również wszyscy amatorzy matematyki elementarnej. To książka, która pomoże Ci dobrze i komfortowo poznać królową nauk!

- Logika i zbiory
- Liczby i działania na nich
- Relacje i funkcje
- Równania, nierówności i układy równań
- Wyznaczniki i macierze
- Trygonometria
- Ciągi liczbowe i szeregi
- Granice i pochodne funkcji
- Całki nieoznaczone i oznaczone
- Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka
- Planimetria i stereometria
- Geometria analityczna i rachunek wektorowy
- Krzywe stożkowe
- Tablice trygonometryczne i tablice działań

Atlas matematyczny — kompendium na szóstkę!

  helion.pl  HELION SA ul. Kościuszki 1c 44-100 Gliwice tel.: 32 230 98 63 helion@helion.pl	<i>Sprawdź nasze szkolenia!</i>  SZKOLENIA AKADEMIA IT & BUSINESS WWW.SZKOLENIA.HELION.PL	KOD KORZYŚCI <i>Sięgnij po więcej!</i>   ISBN 978-83-283-4760-1  9 788328 347601 Cena: 24,90 zł
INFORMATYKA W NAJLEPSZYM WYDANIU		