

## » Idź do

- Spis treści
- Przykładowy rozdział

## » Katalog książek

- Katalog online
- Zamów drukowany katalog

## » Twój koszyk

- Dodaj do koszyka

## » Cennik i informacje

- Zamów informacje o nowościach
- Zamów cennik

## » Czytelnia

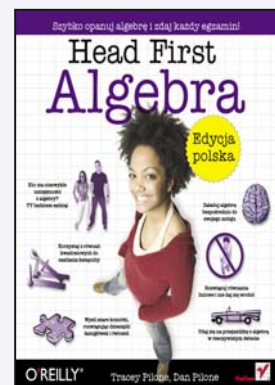
- Fragmenty książek online

## » Kontakt

Helion SA  
ul. Kościuszki 1c  
44-100 Gliwice  
tel. 032 230 98 63  
e-mail: [helion@helion.pl](mailto:helion@helion.pl)  
© Helion 1991-2010

## Head First Algebra. Edycja polska

Autor: Tracey Pilone, [Dan Pilone](#)  
Tłumaczenie: Radosław Meryk  
ISBN: 978-83-246-2128-6  
Tytuł oryginału: [Head First Algebra:  
A Learner's Guide to Algebra](#)  
Format: 200×230, stron: 536



Algebra to jeden z najstarszych działów matematyki – przez wiele osób znienawidzony. Równania, nierówności, parabole, wielomiany to te zagadnienia, które spędzają sen z oczu niejednego adepta królowej nauk. Opisane na niezliczonych stronach (w szalenie monotony sposób) zniechęcają do nauki. Dlaczego? Przecież wystarczyłaby szczypta humoru, zabawna ilustracja oraz przykład praktycznego zastosowania – i już algebra stałaby się porywającą oraz atrakcyjną dziedziną matematyki!

Oto podręcznik, który położy kres koszmarowi nauki algebry! Napisany został w oparciu o najnowsze, niezwykle przyjazne techniki szybkiego przyswajania wiedzy, dzięki czemu szybko i bezboleśnie zrozumiesz wszystkie zagadnienia. Opanujesz między innymi potęgowanie, kartezjański układ współrzędnych, równania, nierówności, układy równań, funkcje i operacje na ułamkach. Dzięki praktycznym przykładom nauczysz się także efektywnie stosować zdobytą wiedzę w praktyce. Książka ta jest zatem świetną pozycją dla uczniów wszystkich rodzajów szkół, bez względu na wiek i stopień matematycznych umiejętności. Nowoczesna metodyka, dużo humoru, świetne przykłady – to wszystko sprawia, że trzymasz w ręku najprawdopodobniej jeden z najlepszych podręczników do nauki algebry!

- Czym jest algebra – poszukiwania niewiadomych
- Reguły postępowania z liczbami
- Potęgowanie
- Wykresy, kartezjański układ współrzędnych
- Równania i nierówności
- Układy równań
- Rozwinięcia dwumianów
- Rozkład na czynniki pierwsze
- Równania kwadratowe i ich zastosowanie
- Funkcje
- Praktyczne zastosowania algebry
- Operacje na ułamkach

**Szybko opanuj algebrę i zdaj każdy egzamin!**

## Spis treści (skrócony)

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Wprowadzenie                                                                                 | 19  |
| 1. Poszukiwanie niewiadomych: <i>czym jest algebra?</i>                                      | 31  |
| 2. Algebra w podróży: <i>(Bardziej) skomplikowane równania</i>                               | 63  |
| 3. Postępuj zgodnie z regułami: <i>reguły operacji z liczbami</i>                            | 99  |
| 4. Podcasty, które rozprzestrzeniają się jak epidemia: <i>potęgowanie</i>                    | 135 |
| 5. Obraz jest wart tyle, co 1000 słów: <i>wykresy</i>                                        | 165 |
| 6. Czy nie można dostać tyle, ile się potrzebuje: <i>nierówności</i>                         | 225 |
| 7. Wiedzieć, czego się nie wie: <i>układy równań</i>                                         | 261 |
| 8. Zrywanie ze sobą jest trudne: <i>rozwiązania dwumianów i rozkład na czynniki pierwsze</i> | 307 |
| 9. Wychodzimy poza linię: <i>równania kwadratowe</i>                                         | 341 |
| 10. Każdy ma jakieś ograniczenia: <i>funkcje</i>                                             | 393 |
| 11. Rozwiązywanie problemów świata: <i>algebra w praktyce</i>                                | 435 |
| A Pięć najważniejszych tematów (których nie poruszyliśmy): <i>pozostałości</i>               | 461 |
| B Buduj na solidnych podstawach: <i>przegląd zagadnień z algebry elementarnej</i>            | 467 |

## Spis treści (na serio)



### Wprowadzenie

**Co myśli Twój mózg o algebrze?** Próbujesz się czegoś *nauczyć*, a Twój mózg oddaje Ci przysługę, próbując robić wszystko, aby proces nauki się *nie kleił*. Twój mózg myśli sobie: „Lepiej zostaw miejsce na ważniejsze sprawy, jak na przykład, których dzikich zwierząt należy unikać i dlaczego jeżdżenie nago na snowboardzie to zły pomysł”. A zatem w jaki sposób *nakłonić* mózg do tego, by zaczął myśleć, że życie zależy od znajomości algebry?

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Dla kogo jest ta książka?                               | 20 |
| Wiemy, co sobie myślisz                                 | 21 |
| Metapoznanie: myślenie o myśleniu                       | 23 |
| Oto co zrobiliśmy                                       | 24 |
| Oto, co możesz zrobić, aby zmusić mózg do posłuszeństwa | 25 |
| Przeczytaj koniecznie                                   | 26 |
| Zespół recenzentów technicznych                         | 28 |
| Podziękowania                                           | 29 |

## Czym jest algebra?

# 1

### Poszukiwanie niewiadomych...

**Czy kiedykolwiek chciałeś wiedzieć więcej, niż wiesz?** W tym właśnie leży sedno algebry: *przemiana niewiadomych w wiadome*. Kiedy przeczytasz ten rozdział, z pewnością uświadomisz sobie, że  $X$  to znacznie więcej niż oznaczenie miejsca, w którym zakopano skarb.



|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| Wszystko zaczęło się od wielkiej promocji konsoli do gier | 32 |
| Ile naprawdę kosztuje konsola?                            | 33 |
| Algebra polega na szukaniu niewiadomych                   | 34 |
| Julia ma znacznie więcej niewiadomych                     | 35 |
| $X$ oznacza niewiadomą                                    | 37 |
| Równania to zdania w matematyce                           | 38 |
| Teraz znajdziemy niewiadomą                               | 43 |
| Jakie działania wykonujesz i kiedy?                       | 45 |
| Działania odwrotne                                        | 46 |
| Ćwiczenia w rozwiązywaniu równań                          | 58 |

## (Bardziej) skomplikowane równania

# 2

### Ruszamy z algebrą

**Wyobraź sobie świat, w którym jest więcej niż JEDNA rzecz, której nie wiesz.**

Nie tylko istnieją problemy z **więcej niż jedną niewiadomą**, ale czasami **ta sama niewiadoma** występuje **wiele razy w tym samym równaniu**! Nie ma się jednak czego obawiać... dzięki narzędziom, które poznasz w tym rozdziale, będziesz rozwiązywać bardziej skomplikowane problemy zupełnie bez wysiłku.



|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| Zawsze zaczynaj od tego, co wiesz                                        | 65 |
| Z każdym uczestnikiem są związane koszty                                 | 66 |
| Zastąp słowa liczbami                                                    | 69 |
| Obliczamy $c$ ... krok po kroku                                          | 71 |
| Jeśli będziesz postępować według zasad, zawsze uzyskasz prawidłowy wynik | 72 |
| Z liczbami całkowitymi zwykle łatwiej się pracuje                        | 73 |
| Zmienna może wystąpić w równaniu więcej niż jeden raz                    | 76 |
| Sprawdzenie pracy potwierdza wynik                                       | 80 |
| Wyraz to fragment równania algebraicznego                                | 90 |

## Reguły operacji z liczbami

## 3

## Postępuj zgodnie z regułami

**Czasami po prostu musisz postępować zgodnie z niewygodnymi regułami.** Jeśli jednak chodzi o algebrę, **reguły to dobra rzecz.** Reguły chronią Cię przed uzyskiwaniem nieprawidłowych odpowiedzi. Często się zdarza, że reguły **pomagają znaleźć niewiadomą** bez większego nakładu dodatkowej pracy. Na czas lektury tego rozdziału odłóż na bok swój kapelusik z balu maskowego. Znajdziesz tu kilka przydatnych zasad, które pozwolą Ci osiągnąć doskonałe wyniki.

| Kolejność wykonywania działań |                         |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1                             | Nawiasy                 |
| 2                             | Potęgowanie             |
| 3                             | Mnożenie i dzielenie    |
| 4                             | Dodawanie i odejmowanie |

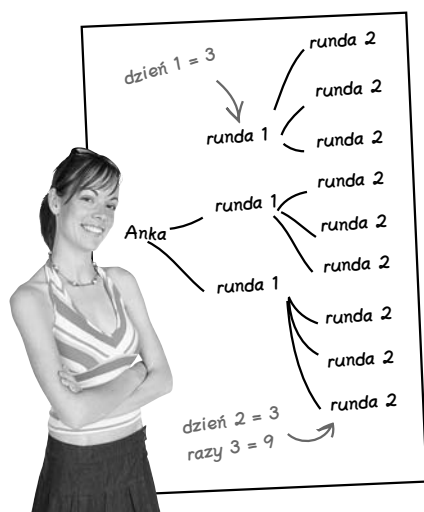
|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| Obowiązuje kolejność wykonywania działań                          | 104 |
| Równania można przekształcać                                      | 112 |
| Własności działań bez tajemnic                                    | 119 |
| To bardzo ważna runda...                                          | 120 |
| Wyciągnięcie wartości przed nawias nie zmienia wartości wyrażenia | 124 |
| Stała reprezentuje liczbę                                         | 128 |

## Potęgowanie

## 4

## Podcasty, które rozprzestrzeniają się jak epidemia

**Czy można pomnożyć to jeszcze raz... i jeszcze raz?** Istnieje inny sposób przedstawienia mnożenia tych samych liczb oprócz powtarzania czynników. **Potęgowanie** to sposób na **powtarzanie mnożenia**. Potęgowanie jest jednak bardziej złożone, jeśli dotyczy liczb mniejszych niż zwykle (i nie mamy tu na myśli ułamków). W tym rozdziale będziemy mówili o **podstawach, stopniach i pierwiastkach**.



|                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------|-----|
| Anka prowadzi podcast                                           | 136 |
| Zmobilizujmy słuchaczy Anki                                     | 137 |
| Czy Anka i Olek uzyskają wystarczającą liczbę wejść?            | 141 |
| Olek zawodzi swoją siostrę                                      | 144 |
| Zawsze są czarne owce...                                        | 148 |
| Zgodnie z kolejnością działań najpierw wykonuje się potęgowanie | 152 |
| Pierwiastkowanie to działanie odwrotne do potęgowania           | 154 |

Wykresy

5

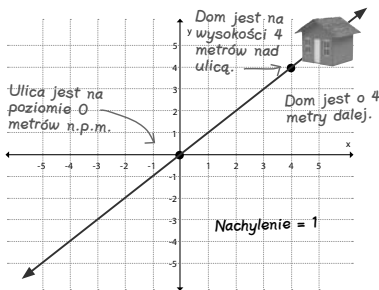
Rysunek jest wart tyle, co 1000 słów

**Czasami równanie zaciemnia problem.** Czy kiedykolwiek zdarzyło Ci się, że spojrzawsz na równanie i pomyślałeś: „Ale co u licha to może *znaczyć*?”. W takich sytuacjach może Ci być potrzebna **wizualna reprezentacja** równania. Do tego właśnie służą wykresy. Dzięki nim można *ogłądać* równania, a nie tylko je czytać. Na wykresie można dostrzec **istotne punkty**. Na przykład kiedy zabraknie Ci pieniędzy lub ile czasu zajmie Ci zaoszczędzenie sumy potrzebnej na nowy samochód. W rzeczywistości dzięki wykresom można wykorzystać równania do podejmowania **inteligentnych decyzji**.

Usługi Strzyżenia Trawników



|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| Firma Edka potrzebuje pomocy...                                       | 166 |
| Dlaczego po prostu nie pokażecie mi odpowiedzi?                       | 171 |
| Wykres przepływu gotówki w firmie Edka                                | 172 |
| Wykresy pokazują całą relację                                         | 173 |
| Narysujmy równanie Edka na układzie współrzędnych                     | 184 |
| Edek oblicza NACHYLENIE trawników                                     | 190 |
| Równanie prostej przechodzącej przez punkt                            | 194 |
| W jaki sposób na podstawie punktu i nachylenia można wyznaczyć linię? | 195 |
| Skorzystajmy z równania prostej przechodzącej przez punkt             | 200 |
| Równania mają również postać ogólną                                   | 204 |
| Postać kierunkowa jest łatwa do wykreślenia                           | 205 |



## Nierówności

## 6

## Czy nie można dostać tyle, ile się potrzebuje?

**Czasami wystarczająco oznacza wystarczająco... a czasami nie.** Czy kiedykolwiek pomyślałeś: „Potrzebuję nieco więcej”? Co jednak, jeśli ktoś dał Ci *więcej* niż tylko trochę *więcej*? Wtedy miałbyś *więcej, niż potrzebujesz...* ale życie pomimo to mogłoby być dość przyjemne. W tym rozdziale pokażemy, w jaki sposób język algebry pozwala powiedzieć: „Daj mi trochę więcej... i jeszcze troszkę!”. Dzięki **nierównościom** możemy wyjść *poza dwie wartości* i pozwolić sobie na otrzymywanie *więcej* lub *mniej*.

| Pozycja             | Nazwisko | Pensja |
|---------------------|----------|--------|
| Formacja defensywna |          |        |
| Biegacz             |          |        |
| Skrzydłowy          |          |        |
| Kopacz              |          |        |
| Rozgrywający        |          |        |
|                     | Razem    |        |

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Karolina bardzo lubi futbol                                                                        | 226 |
| Koszty dla wszystkich graczy nie mogą przekroczyć 1 000 000 €                                      | 227 |
| Nierówności to porównania                                                                          | 230 |
| Nierówności wykorzystujące operacje na liczbach ujemnych wymagają specjalnego traktowania          | 234 |
| Nierówności z liczbami ujemnymi działają w przeciwnym kierunku                                     | 235 |
| Zmiana znaku nierówności poprzez mnożenie bądź dzielenie obu stron nierówności przez liczbę ujemną | 236 |
| Kiedy wykonujesz działania z nierównościami oraz mnożeniem bądź dzieleniem przez liczbę ujemną...  | 237 |
| Zbiór rozwiązań możesz zobrazować na osi liczbowej                                                 | 243 |
| W nierównościach mogą występować dwie zmienne                                                      | 247 |
| Korzystaj z wykresu w celu wizualizacji rozwiązań nierówności                                      | 251 |
| Odpowiedzi tworzą obszar zacieniowany                                                              | 252 |
| Czy jesteście gotowi na trochę futbolu?                                                            | 257 |

| Formacje defensywne |           |
|---------------------|-----------|
| Zespół              | Koszt     |
| Waleczni            | 300 000 € |
| Orły                | 200 000 € |
| Stalowi             | 333 000 € |
| Kruki               | 250 000 € |

| Biegacze            |           |
|---------------------|-----------|
| Nazwisko            | Koszt     |
| Michał Abramowicz   | 197 000 € |
| Bogdan Horbaczewski | 202 187 € |
| Ryszard Tomczak     | 185 200 € |
| Edward Babinicz     | 209 115 € |

| Skrzydłowi         |           |
|--------------------|-----------|
| Nazwisko           | Koszt     |
| Benedykt Trawiński | 195 289 € |
| Edmund Fredro      | 212 000 € |
| Roman Jankowski    | 185 200 € |
| Marek Martyniuk    | 165 950 € |

| Kopacze          |           |
|------------------|-----------|
| Nazwisko         | Koszt     |
| Jerzy Amanowski  | 183 500 € |
| Ryszard Wolański | 155 000 € |
| Piotr Hiszczuk   | 203 200 € |
| Mateusz Ewański  | 209 100 € |

| Rozgrywający      |           |
|-------------------|-----------|
| Nazwisko          | Koszt     |
| Tomasz Jagielski  | 208 200 € |
| Eryk Hetman       | 175 000 € |
| Paweł Bromski     | 199 950 € |
| Daniel Drzycimski | 202 400 € |

Układy równań

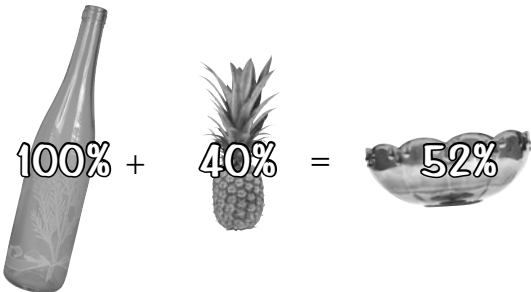
7

Wiedzieć, czego się nie wie

**Równania z dwiema niewiadomymi można przedstawić na wykresie, ale czy można je faktycznie rozwiązać?** Niedawno tworzyliśmy wykresy dla bardzo różnych wyrażeń:  $G$  i  $t$ ,  $x$  i  $y$  oraz innych. Co jednak zrobić, aby **rozwiązać** równania z **dwiema niewiadomymi**? W takim przypadku należy wykorzystać więcej niż jedno równanie. Mówiąc dokładniej, potrzebujemy równania dla każdej niewiadomej, którą próbujemy znaleźć. Co dalej? Kilka **podstawień**, parę **linii** i **przecięcie** — to wszystko, co jest potrzebne do rozwiązywania równań z dwiema niewiadomymi.



|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Nie możesz użyć –1 litra cieczy!                                                | 267 |
| W jaki sposób działa równanie do obliczania nasycenia CO <sub>2</sub> w ponczu? | 269 |
| Punkt przecięcia linii wyznacza rozwiązanie obu równań liniowych                | 273 |
| Rozwiązywanie równań z wieloma niewiadomymi za pomocą układów równań            | 274 |
| Dwa rodzaje naczyń... oto dwie niewiadome                                       | 276 |
| Rozwiązujemy problem naczyń                                                     | 277 |
| Zamiast wykresu można zastosować metodę podstawiania                            | 278 |
| Obliczenie $w$ nie przysporzyło żadnych problemów                               | 286 |
| Przekształcanie równań w celu przygotowania do eliminowania zmiennych           | 289 |
| Układy równań — podsumowanie                                                    | 293 |
| Prywatka u Zbyszka!                                                             | 294 |
| Czasami dwa równania nie oznaczają dwóch linii                                  | 302 |



## Rozwinięcia dwumianów i rozkład na czynniki pierwsze

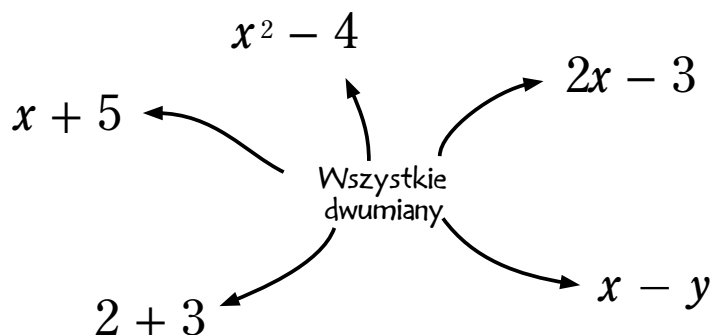
## 8

## Zrywanie ze sobą jest trudne

**Czasami wystarczy, że ktoś czegoś nie zrozumie, aby Cię zirytować.** Do tej pory mieliśmy do czynienia z takimi zmiennymi, jak  $x$  i  $y$ . Co jednak się stanie, jeśli  $x$  w naszych równaniach zostanie **podniesione do kwadratu**? Nadszedł czas, aby się tego dowiedzieć. Teraz mamy już wszystkie narzędzia potrzebne do rozwiązywania takich problemów! Pamiętaj o regule rozdzielności mnożenia względem dodawania? W tym rozdziale nauczymy Cię, w jaki sposób skorzystać z **rozdzielności** oraz specjalnej techniki **PZWO** w celu rozwiązywania nowego rodzaju równań: **dwumianów**. Przygotuj się — nadszedł czas, by nauczyć się **upraszczać** naprawdę trudne równania.



|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Liczyć czy nie liczyć — finały rejonowe                                           | 308 |
| Kto ma rację?                                                                     | 309 |
| Dwumian to grupa dwóch wyrażeń algebraicznych                                     | 311 |
| Wracamy do własności rozdzielności mnożenia względem dodawania                    | 312 |
| Upraszczenie dwumianów dzięki własności rozdzielności mnożenia względem dodawania | 313 |
| Co zrobić, jeśli znaki są takie same?                                             | 319 |
| Czasami nie można znaleźć wzoru...                                                | 321 |
| Metoda PZWO zawsze się sprawdza                                                   | 322 |
| Rozkład na czynniki to inaczej faktoryzacja                                       | 327 |
| Faktoryzacja polega na odwróceniu efektów mnożenia                                | 328 |
| Faktoryzacja poprzez znalezienie wspólnego czynnika                               | 329 |
| Faktoryzacja — podsumowanie                                                       | 330 |
| Zero pomnożone przez dowolną liczbę daje 0                                        | 334 |



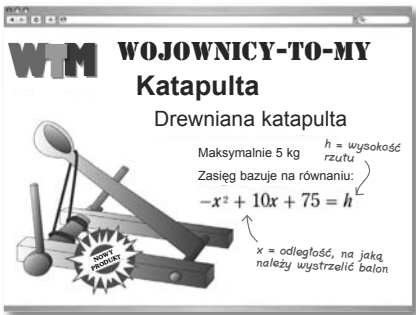


Równania kwadratowe

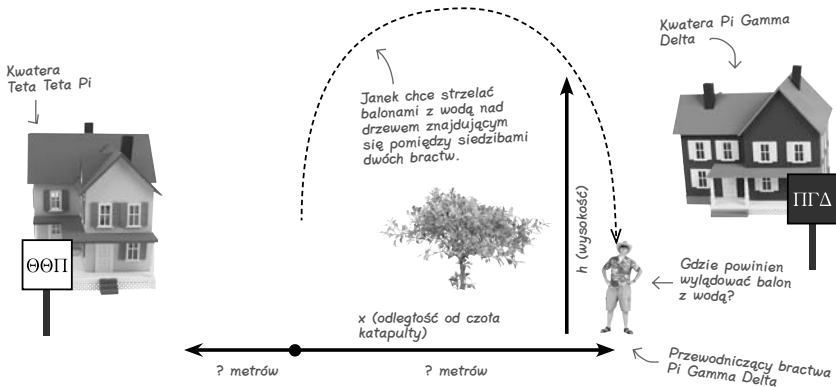
9

Wychodzimy poza linię

**Nie wszystko w życiu ma charakter liniowy.** Ale sam fakt, że równania nie da się wykreślić w postaci **linii prostej**, nie oznacza, że jest nieważne. W rzeczywistości większość z najważniejszych **niewiadomych**, z którymi spotykamy się w życiu, ma charakter **nieliniowy**. Czasami musimy korzystać z wyrażen o **wykładnikach większych od 1**. Równania zawierające **wyrażenia kwadratowe** na wykresie tworzą **krzywe**! W jaki sposób to działa? Jest tylko jeden sposób na to, by się tego dowiedzieć.



|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| Bractwo Head First U jest w stanie wojny!          | 342 |
| Janek unowocześnia swoją technologię               | 343 |
| Gdzie Janek umieści katapultę?                     | 347 |
| Zawsze należy opracować plan                       | 348 |
| Bractwo Pi Gamma Delta buduje mur!                 | 352 |
| 9 metrów to nie problem                            | 360 |
| Równanie kwadratowe                                | 361 |
| Co to jest wyróżnik delta?                         | 368 |
| Wojna bractw — część druga                         | 372 |
| Jak należy wykreślić x²?                           | 374 |
| Wykresem równania kwadratowego jest parabola       | 378 |
| Wykreślenie paraboli wymaga znajomości wierzchołka | 379 |
| Praca z parabolą — sposób inteligentny             | 383 |
| Wyróżnik pomaga także w tworzeniu wykresów         | 384 |



## Funkcje

## 10

## Każdy ma jakieś ograniczenia

**Niektóre równania są jak sąsiedzi na przedmieściu... ogrodzeni płotem.**

Jak można się przekonać, w rzeczywistym świecie wiele równań ma **ograniczenia**.

Równania są dobre tylko dla niektórych wartości. Na przykład, nie można przejechać samochodem –10 kilometrów lub wykopać dołu o wysokości 4 metrów w górę. W takich przypadkach należy określić **ograniczenia** dla równań. A do określania ograniczeń dla równań nie ma niczego lepszego od **funkcji**. Funkcja? Co to jest, u licha? Otwórz na właściwej stronie i dowiedz się — tak jak na ekranie reality show.



|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Zespół Śmierć Piżamy w telewizji                                                  | 395 |
| Równania mają ograniczenia (w większości przypadków)                              | 397 |
| Ograniczenia argumentów wyznaczają dziedzinę funkcji                              | 398 |
| Funkcje mogą mieć minimalną i maksymalną wartość                                  | 401 |
| Algebra dotyczy relacji                                                           | 404 |
| Relacje, równania i funkcje są ze sobą powiązane                                  | 409 |
| Funkcje — podsumowanie                                                            | 410 |
| Wykresy funkcji mają ograniczenia                                                 | 413 |
| Przed drugim odcinkiem programu telewizyjnego z udziałem zespołu Śmierć Piżamy... | 417 |
| Wykres pokazuje charakter relacji                                                 | 418 |
| Funkcje przechodzą test linii pionowej                                            | 419 |
| Ale... co z resztą biletów?                                                       | 423 |
| Wykorzystaj tę część funkcji, której potrzebujesz                                 | 424 |
| Mamy wszystkie dane... i co z tego wynika?                                        | 427 |
| Program telewizyjny z udziałem zespołu Śmierć Piżamy okazał się hitem!            | 429 |

€

=



+



Algebra w praktyce

11

Rozwiązywanie problemów świata

**Świat ma wielkie problemy... Ty masz wielkie odpowiedzi.** Kilkaset stron wiedzy matematycznej i co z tego masz? Pęk iksów i igreków oraz parametrów  $a$  i  $b$ ? Nieprawda... masz **umiejętności znajdowania niewiadomych**. Nawet w **najtrudniejszych sytuacjach**. Do czego to może służyć? Ten rozdział w całości będzie poświęcony **realnym problemom**: wykorzystasz swoją wiedzę z algebry do **rozwiązywania praktycznych problemów**. Kiedy to Ci się uda, będziesz mieć wielu przyjaciół, znać wpływowych ludzi i zaoszczędzisz mnóstwo pieniędzy. Jesteś zainteresowany? A więc do dzieła.



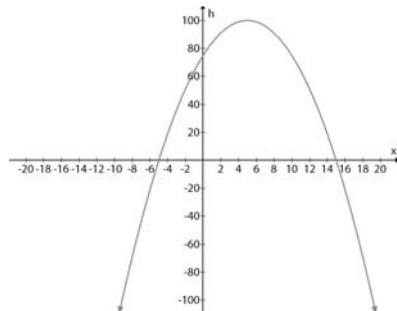
|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Obliczanie odsetek na podstawie stopy procentowej oraz pożyczonej kwoty kapitału | 443 |
| Marek jeszcze nie jest właścicielem tego samochodu...                            | 448 |
| Dzięki algebrze nie musisz bawić się w ZGADYWANIE                                | 456 |
| Marek chce Ci płacić za to, byś stał się jego planistą finansowym                | 460 |

Pozostałości

A

Pięć najważniejszych tematów (których nie poruszyliśmy)

**Niewątpliwie wiele nauczyłeś się z tej książki, tymczasem algebra może zaoferować Ci jeszcze więcej.** Nie bój się. To już prawie koniec! Przedtem jednak musimy wypełnić jeszcze kilka luk. Następnie będziesz mógł zacząć poznawać algebrę zaawansowaną, ale to już zupełnie oddzielna książka.



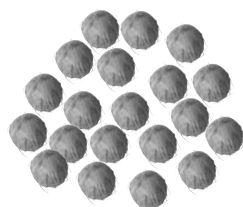
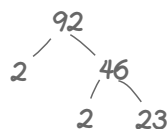
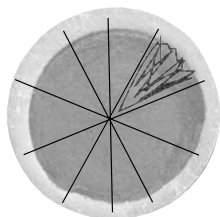
|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Numer 1. Potęgi o wykładnikach ujemnych                                    | 462 |
| Numer 2. Tabela wartości do tworzenia wykresów                             | 464 |
| Numer 3. Równania z wartością bezwzględną                                  | 465 |
| Numer 4. Kalkulatory                                                       | 466 |
| Numer 5. Dodatkowe ćwiczenia — zwłaszcza w rozkładaniu wyrażeń na czynniki | 466 |

## Przegląd zagadnień z algebry elementarnej

B

## Budowa na solidnych podstawach

**Czy kiedykolwiek miałeś wrażenie, że nie wiesz, od czego zacząć?** Algebra jest doskonała, ale jeśli chcesz się jej uczyć, musisz dobrze znać reguły rządzące liczbami. Przypuśćmy, że zdałeś sobie sprawę z tego, że zapomniałeś, jak mnoży się liczby całkowite, dodaje ułamki zwykłe lub dzieli ułamki dziesiętne. W takim razie trafiłeś w odpowiednie miejsce! W tym dodatku umieścimy wszystkie wiadomości z algebry elementarnej, które powinieneś znać — w *telegraficznym skrócie*.



|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Algebra zaczyna się od liczb                                                  | 468 |
| W jaki sposób pracuje się z liczbami ujemnymi?                                | 469 |
| Dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych                                     | 471 |
| Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych                                        | 472 |
| Wartość bezwzględna                                                           | 475 |
| Zbiory liczbowe – wszystkie razem                                             | 480 |
| Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych                                  | 484 |
| Mnożenie ułamków dziesiętnych                                                 | 487 |
| Dzielenie ułamków dziesiętnych                                                | 488 |
| Specjalne ułamki dziesiętne                                                   | 490 |
| Działania na procentach                                                       | 494 |
| Ułamki                                                                        | 497 |
| Mnożenie ułamków                                                              | 498 |
| Ułamki niewłaściwe                                                            | 501 |
| Więcej informacji na temat ułamków niewłaściwych                              | 502 |
| Wyznaczanie odwrotności ułamków                                               | 505 |
| Dodawanie i odejmowanie ułamków                                               | 507 |
| Aby porównywać ułamki, trzeba sprowadzić je do wspólnego mianownika           | 508 |
| Wyznaczanie najmniejszego wspólnego mianownika w operacji dodawania           | 509 |
| Dzielenie przez jeden nie zmienia wartości                                    | 513 |
| Skracanie ułamków poprzez dzielenie przez 1                                   | 514 |
| Drzewa rozkładu na czynniki pozwalają na wyeliminowanie wielu drobnych kroków | 515 |
| Upraszczanie ułamków za pomocą drzewa rozkładu na czynniki                    | 516 |
| Podsumowanie — ułamki                                                         | 518 |
| Przekształcanie ułamków dziesiętnych na zwykłe                                | 522 |
| Dzielenie przez zero jest niedozwolone                                        | 525 |
| Czasami mnożenie zajmuje wieczność!                                           | 526 |

S

## Skorowidz

527

## 11. Algebra w praktyce

# Rozwiązywanie problemów świata

Wzięłam pod uwagę to, jak bardzo  
mnie kochasz, uwzględniłam cenę  
tego samochodu i tak... masz rację.  
Zdecydowanie jesteś mężczyzną dla mnie.  
Zostańmy razem!



**Świat ma wielkie problemy... Ty masz wielkie odpowiedzi.** Kilkaset stron wiedzy matematycznej i co z tego mamy? Pęk iksów i igreków oraz parametrów  $a$  i  $b$ ? Nieprawda... masz **umiejętności znajdowania niewiadomych**. Nawet w najtrudniejszych sytuacjach. Do czego to może służyć? Ten rozdział w całości będzie poświęcony **praktycznym problemom**: wykorzystamy umiejętności z algebry do **rozwiązywania praktycznych problemów**. Kiedy to Ci się uda, będziesz mieć wielu przyjaciół, znać wpływowych ludzi i zaoszczędzisz mnóstwo pieniędzy. Jesteś zainteresowany? A więc do dzieła.

## Kupowanie samochodu z pomocą algebry



Zaoszczędziłem trochę forsy i mam zamiar postarać się o dobrą pracę, kiedy za 9 miesięcy ukończę szkołę. Z całą pewnością przydałyby mi się cztery kółka... Potrzebuję dobrego kredytu na takich warunkach, którym mógłbym sprostać.

Finanse? Mój przyjacielu, przyszedłeś we właściwe miejsce. Zobacz, co mogę zrobić, abyś już dziś mógł jeździć tym wózkiem. Możemy ci zaoferować raty zero procent, bez odsetek, na długi okres spłaty... powiedz, czego chcesz, a my sprawimy, że stanie się to rzeczywistością. Budżet? Nie ma obawy. Stać cię na więcej samochodów, niż ci się wydawało.

Marek za kilka miesięcy ma dostać nową pracę. Potrzebuje fajnego samochodu, który pasowałby do jego nowego statusu.



Mówiłeś coś o handlarzu używanymi samochodami? Lepiej uważaj na tego gościa...



Obiekt marzeń motoryzacyjnych Marka — samochód sportowy za 25 000 €.



## Zaostrz ołówek

Marek musi wiele przemyśleć, aby zdobyć samochód swoich marzeń. Poniżej zamieszczono kilka dokumentów, które Marek musi wziąć pod uwagę... zapisz kilka informacji, które pomogą Markowi ruszyć z miejsca.

Z jakimi algebraicznymi niewiadomymi będziemy mieli do czynienia? .....

Jakie elementy będą miały wpływ na koszty samochodu Marka? (Od czego będą one zależały?) .....

Moto Salon

FORMULARZ DANYCH  
**SAMOCCHODU**  
 1992 HF 5.0L SALOON  
 4-PASSENGER SPECIALTY  
 5.0L FI HF V-ENGINE  
 AUTO OVERDRIVE TRANSMISSION

VIN 1HFACALG4UISCOOL  
 EXTERIOR  
 BLUE AD SHINY  
 INTERIOR  
 GRAY LEATHER

WYPOSAŻENIE STANOWISKA

BEZ DODATKOWYCH OPŁAT  
 SZCZEGÓLNICZKO Z PRAWEJ STRONY:  
 • PRZECIEMNIANE SZYBY  
 • ELEKTRONICZNE RADIO STEREO  
 AM/FM Z ZEGAREM  
 • KIEROWNICA OPRĄWIONA W SKÓRĘ  
 • ELEKTRYCZNE SZYBY  
 • INTERWAŁOWE WYCIERACZKI  
 • PEŁNE OPRIŻYRZĄDOWANIE  
 – TACHOMETER  
 – TERMOMETR  
 – KONTROLA NAPIĘCIA  
 AKUMULATORA  
 – OŚCIEŻNIAJĄCE  
 – REGULOWANE

ST  
 ED WITH A  
 STEM (SRS)

INFORMACJE O CENIE

STANDARDOWA CENA POJAZDU **€18540.00**  
 WYPOSAŻENIE OPCJONALNE  
 PREFEROWANY PAKIET WYPOSAŻENIA NR 4560  
 SZYBKOŚCIOMIĘRZ  
 ELEKTRYCZNE RADIO AM/FM Z ZEGAREM I  
 MAGNETOFONEM  
 DODATKOWY BIEG OVERDRIVE  
 MODUŁ OSZCZĘDNOŚCI PALIWA P233/H323F4778  
 UDOĞODNIENIA  
 PRZEDNI PANEL DO MOCOWANIA TABLICY  
 REJESTRACYJNEJ  
 8-PUNKTOWO PODGRZEWANE SIEDZENIA  
 LIMITOWANA EDYCJA  
 OPCJONALNA BLOKADA MECHANIZMU  
 RÓŻNICOWEGO  
 KLIMATYZACJA  
 ŚRODEK DO PIELĘGNACJI SIEDZEŃ SKÓRZANYCH  
 KOREKTOR GRAFICZNY

1641.00  
 1190.00  
 W CENIE  
 198.00  
 W CENIE  
 366.00  
 1700.00  
 W CENIE  
 1634.00  
 W CENIE  
 278.00

RAZEM POJAZD+WYPOSAŻENIE OPCJONALNE  
 KOSZTY SPROWADZENIA I DOSTAWY  
 RAZEM PRZED UDZIELENIEM RABATÓW

28230.00  
 440.00  
 28670.00

Jan Kowalski - Ubezpieczenia Samochodowe

UBEZPIECZENIE SAMOCCHODU

Imię i nazwisko:  
 Adres:  
 Miasto, wojew  
 Adres e-mail:  
 Telefon dom  
 Czas:  
 yrs.  
 Wynajmow  
 NIP:

Bank Kredytowo-Oszczędnościowy

KREDYT SAMOCCHODOWY — FORMULARZ

Marka samochodu:  
 Bank Kredytowo-Oszczędnościowy  
 1234 SQL St. PO Box 1000  
 Dataville DV 26849

WYCIĄG BANKOWY

STRONA 1 z 1

| Okres      | Numer rachunku   |
|------------|------------------|
| 2009-03-31 | 00004-323-3477-8 |

| WYPŁATY | WPLATY | SALDO      |
|---------|--------|------------|
|         |        | € 7,267.00 |
|         |        | € 7,164.00 |
|         |        | € 7,104.00 |
|         |        | € 7,074.00 |
|         |        | € 7,574.00 |
|         |        | € 7,374.00 |
|         |        | € 7,264.00 |
|         |        | € 7,300.00 |
|         |        | € 36.00    |
|         |        | € 7,300.00 |

SAVINGS  
BUYING  
PARATELY

€3670.00

€25000.00

54999

527358

Jeszcze 9 miesięcy...

Kalendarz 2009

~~Styczeń 2009~~  
~~Luty 2009~~  
~~Marzec 2009~~  
~~Kwiecień 2009~~  
~~Maj 2009~~  
~~Czerwiec 2009~~  
~~Lipiec 2009~~  
~~Sierpień 2009~~  
~~Wrzesień 2009~~  
~~Październik 2009~~  
~~Listopad 2009~~  
~~Grudzień 2009~~

## Co się składa na cenę samochodu?



### Zaostrz ołówek: Rozwiązanie

Twoim zadaniem było wynotowanie elementów, które Marek musi wziąć pod uwagę przy zakupie samochodu. Oto co napisaliśmy:

Z jakimi algebraicznymi niewiadomymi będziemy mieli do czynienia? *Musimy uwzględnić cenę samochodu, jego ubezpieczenie, oprocentowanie pożyczki na samochód, kwotę pieniędzy, jaką Marek zdoła odłożyć, oraz okres, na jaki Marek chce wziąć pożyczkę.*

Jakie elementy będą miały wpływ na koszty samochodu Marka? (Od czego będą one zależały?) *Niektóre koszty będą zależały od ceny samochodu (ubezpieczenie, wysokość odsetek pożyczki itp.), natomiast inne będą zależeć od czasu — na przykład okres, na jaki Marek zaciągnie pożyczkę, oraz to, jak szybko będzie mógł ją spłacić.*

### Czat IM: Koszty związane z zakupem samochodu



Krystyna

Jest wiele rzeczy, które składają się na koszty samochodu. Większość z nich zależy od tego, jaka jest jego cena wyjściowa. Zgadza się?

Tak, a to jeszcze zależy od tego, ile Marek może zapłacić gotówką. Większość dilerów żąda zapłacenia co najmniej 1000 €.



Jola

Nie zapominajcie o tym, że Marek musi jeszcze przez 9 miesięcy chodzić do szkoły, zanim dostanie pracę!

Hm... to nie jest łatwa sytuacja. Ponieważ nie ma pracy, opłata gotówką i raty miesięczne będą musiały w tym okresie pochodzić z oszczędności.



Krystyna

To prawda. W porządku. Zatem wysokość oszczędności Marka powinna wynosić 9 razy wysokość płatności miesięcznej plus wysokość opłaty gotówką. Możemy to zapisać w formie równania, w następującej postaci:  $\text{oszczędności} = \text{płatność gotówką} + 9 \cdot (\text{rata miesięczna})$ . Z tego równania można łatwo wyznaczyć płatność miesięczną.

Cóż, to jednak trochę trudniejsze. Diler mówi, że musimy wpłacić przynajmniej 1000 €. Płatności, co oczywiste, nie mogą być ujemne. Zatem nie jest to tylko proste równanie.



Krystyna

Hm... jeśli trzeba ograniczyć wartości, to należy wykorzystać funkcję. Zgadza się?

Tak. Musimy zapisać równanie w postaci funkcji i wprowadzić ograniczenia dla dziedziny i przeciwdziedziny.



Jola

Poczekajcie! Jeśli zapiszemy to w formie funkcji, będziemy mogli narysować wykres. Tak?

Jasne! Dzięki temu zobaczymy zależność wysokości pierwszej wpłaty od wysokości miesięcznych rat.



...



Janek



Janek



Janek



Janek



Janek





## Zaostrz ołówek

Zapisz równanie Marka w postaci funkcji, znajdź dziedzinę oraz przeciwdziedzinę i narysuj wykres. Załóżmy, że Marek zaoszczędził 7300 €. Na jaką ratę miesięczną za samochód będzie sobie mógł pozwolić?

7300 €      Oznaczmy to przez  $p(r)$ .      Tę wielkość oznaczmy przez  $r$ .

oszczędności = pierwsza wpłata + 9 (rat miesięcznych)

.....

.....

.....

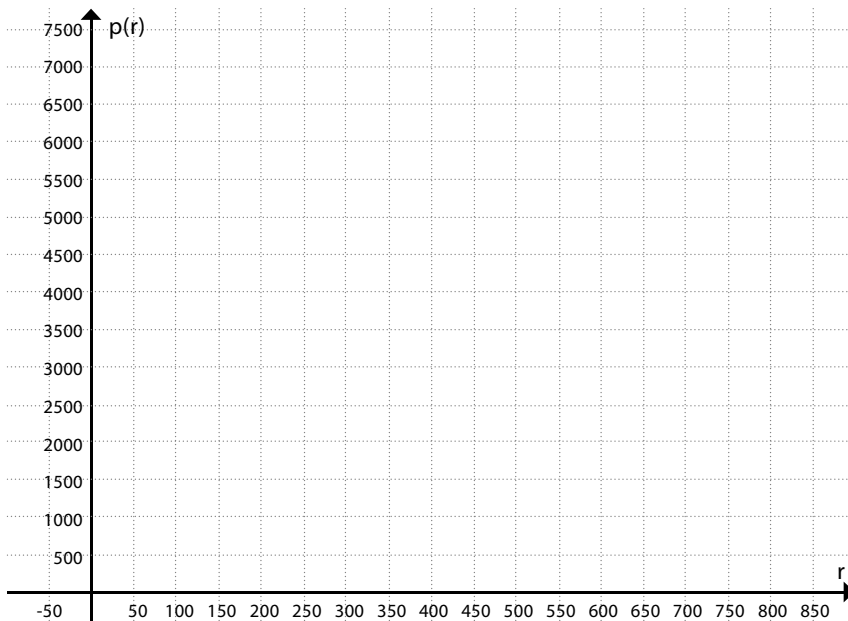
.....

**Dziedzina:** ..... **Przeciwdziedzina:** .....

.....

.....

.....





## Zaostrz ołówek: Rozwiązanie

Zapisz równanie Marka w postaci funkcji, znajdź dziedzinę oraz przeciwdziedzinę i narysuj wykres. Załóżmy, że Marek zaoszczędził 7300 €. Na jaką ratę miesięczną za samochód będzie sobie mógł pozwolić?

7300 €

Oznaczmy to przez  $p(r)$ .Tę wielkość  
oznaczymy przez  $r$ .

oszczędności = pierwsza wpłata + 9 (rat miesięcznych)

$$7300 = p(r) + 9(r)$$

Chcemy się dowiedzieć, jaka jest relacja pomiędzy  $p(r)$  a wysokością raty miesięcznej. W związku z tym spróbujemy wyizolować  $p(r)$  i traktować tę wielkość jako wysokość pierwszej wpłaty.

$$-7300 + 7300 - p(r) = 9(r) - 7300$$

Można by również odjąć 9m od obu stron równania, aby uzyskać sam wyraz  $p(r)$ . Każdy ze sposobów jest dobry... wszystko zależy od Ciebie.

$$-1(-p(r)) = (-7300 + 9(r)) - 1$$

Mnożymy przez -1, aby uzyskać dodatni wyraz  $p(r)$ .

$$p(r) = 7300 - 9r$$

**Dziedzina:**

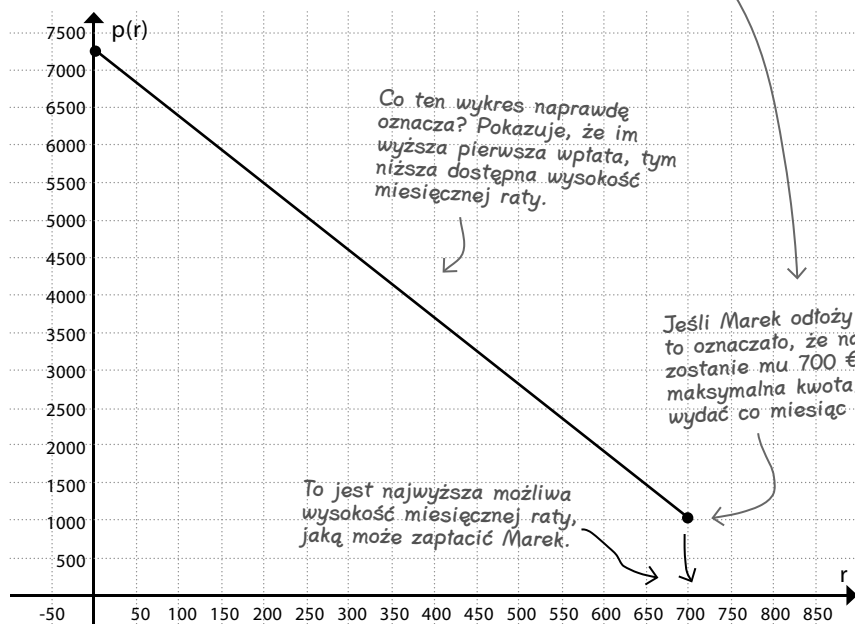
$$0 \leq r \leq 700$$

Rata miesięczna musi wynosić 0 lub więcej.

**Przeciwdziedzina:**  $1000 \leq p(r) \leq 7300$ 

Pierwsza wpłata musi wynosić co najmniej 1000 € i mniej niż całkowita kwota oszczędności zebranych przez Marka.

W celu wyznaczenia górnej granicy — maksymalnej kwoty, którą Marek będzie miał do dyspozycji — należy odjąć od sumy zgromadzonych oszczędności (7300 €) kwotę minimalnej pierwszej wpłaty (1000 €). A zatem mamy 6300 €. Wartość tę trzeba podzielić przez 9 miesięcy. Maksymalna wysokość raty miesięcznej wynosi więc 700 € za miesiąc.



## Czat IM: Kapitał i odsetki



Jola

Świetnie! A więc na ratę mamy do dyspozycji 700 € miesięcznie. To całkiem nieźle.

Poczekajcie. Zapomnieliśmy o ubezpieczeniu samochodu. Jest obowiązkowe. Telefonowałam w kilka miejsc. Powinniśmy przyjąć kwotę 150 € miesięcznie. Jeśli odejmiemy 150 € miesięcznie od kwoty 700 €, to okaże się, że płatność miesięczna będzie mogła wynieść nie więcej niż 550 €.



Jola

To w dalszym ciągu całkiem dużo. Witaj, nowa bryczko!

Spokojnie. Nie gorączkujcie się. Nie mówiliśmy jeszcze nic o odsetkach. Wiemy, ile Marek może zapłacić co miesiąc, ale nie wszystkie te pieniądze idą na spłatę samochodu... jeśli chce pożyczyć pieniądze, musi zapłacić odsetki bankowe.



Krystyna

To prawda. Banki naliczają odsetki od kapitału — kwoty, którą pożyczymy. A więc Marek może zapłacić 550 € miesięcznie, ale nie wszystkie te pieniądze będą przeznaczone na spłatę samochodu.

Tak jest. Na kwotę 550 € składają się odsetki i kapitał. Musimy się zastanowić, na jaki kredyt może sobie pozwolić Marek. Niektórzy spośród wątpliwej jakości dilerów naliczają niebotycznie wysokie odsetki.



Krystyna

A zatem powinniśmy zastanowić się nad kredytem. Na całkowitą kwotę kredytu będzie się składał pożyczony kapitał powiększony o odsetki, które naliczy bank. Coś w tym guście: **kapitał + odsetki = całkowita kwota kredytu**.

Zgadza się. Marek będzie musiał spłacić kredyt w miesięcznych ratach. Kwota kredytu będzie równa kwocie miesięcznej raty pomnożonej przez liczbę rat, które Marek będzie spłacał. Będzie to wyglądało następująco: **kwota kredytu = miesięczna rata x liczba rat**.



...



Krystyna



Janek



Janek



Jola

Dokładnie. Zatem spróbujemy obliczyć, na co może sobie pozwolić Marek...



## WYTEŻ UMYSŁ

Połącz dwa równania występujące w konwersacji IM i stwórz na ich podstawie *jedno* równanie pozwalające wyliczyć wysokość miesięcznej raty, jaką będzie płacił Marek.

.....

.....

.....



# WYTEŻ UMYŚL. ROZWIĄZANIE

Połącz dwa równania występujące w konwersacji IM i stwórz na ich podstawie *jedno* równanie pozwalające wyliczyć wysokość miesięcznej raty, jaką będzie płacił Marek.

Równanie 1.

Równanie 2.

$$\begin{aligned} \text{Kapitał} + \text{Odsetki} &= \text{Całkowita kwota kredytu} & \text{Kwota kredytu} &= \text{Miesięczna rata} \cdot \text{Liczba rat} \\ \text{Kapitał} + \text{Odsetki} &= \text{Miesięczna rata} \cdot \text{Liczba rat} \\ \frac{(\text{Kapitał} + \text{Odsetki})}{\text{Liczba rat}} &= \frac{\text{Miesięczna rata} \cdot \text{Liczba rat}}{\text{Liczba rat}} & \text{Teraz możemy wyizolować} & \text{miesięczną ratę.} \\ \frac{(\text{Kapitał} + \text{Odsetki})}{\text{Liczba rat}} &= \text{Miesięczna rata} & \text{To właśnie chcieliśmy wyliczyć...} & \text{Miesięczną ratę Marka.} \end{aligned}$$

OK. Doskonale.  
Ile jednak będę musiał  
zapłacić odsetek? W banku  
odeśłali mnie do tej strony  
internetowej, ale nie wiem,  
co to wszystko znaczy...



**Bank Kredytowo-Oszczędnościowy**

BKO Strona Główna > Oprocentowanie wkładów > Oprocentowanie pożyczek konsumenckich

Pożyczki na zakup nowych samochodów

Samochody nowe Samochody używane Samochody hybrydowe Pojazdy rekreacyjne

|                       | 3 lata | 4 lata | 5 lat |
|-----------------------|--------|--------|-------|
| <b>Oprocentowanie</b> | 3,0%   | 3,5%   | 4,0%  |

$$\frac{(\text{Kapitał} + \text{Odsetki})}{\text{Liczba rat}} = \text{Miesięczna rata}$$

24 000 € Wynikająca z warunków kredytu wybranego przez Marka Maks. 550 €

## Samochód marzeń Marka kosztuje 25 000 €.

Możemy podstawić informacje, które znamy, a następnie obliczyć resztę. Wiemy, że Marek może sobie pozwolić na płaćenie miesięcznych rat w wysokości 550 € oraz że na zakup samochodu potrzebny mu jest kapitał w wysokości 24 000 €. Skoro znamy oprocentowanie kredytu, powinniśmy bez trudu wypełnić pozostałe elementy równania.

Pamiętaj, samochód kosztuje 25 000 €, ale Marek dokonał pierwszej wpłaty w wysokości 1000 €. Zatem pozostaje 24 000 €, które trzeba pożyczyć.

## Obliczanie odsetek na podstawie stopy procentowej oraz pożyczonej kwoty kapitału

Znamy dostępne okresy spłaty, jakie oferuje bank: 3 lata (36 miesięcy), 4 lata (48 miesięcy) i 5 lat (60 miesięcy). Znamy również wysokość oprocentowania dla każdego z wymienionych okresów spłaty. W celu uzupełnienia równania musimy poznać kwotę odsetek. W jaki sposób można uzyskać tę wartość?

Cóż, mógłbyś poszukać w Google hasła „Kalkulator odsetek prostych”, ale nie musisz, bo zrobiliśmy te obliczenia za Ciebie. To jest równanie pozwalające na obliczenie kwoty odsetek na podstawie okresu spłaty i kwoty kapitału:

$O_{\text{proste}} = (p \cdot K_0)n$

*O oznacza całkowitą kwotę odsetek.*  
*Stopa oprocentowania w postaci liczby dziesiętnej.*  
*Odsetki proste oblicza się z takiego wzoru.*  
*Liczba płatności (w LATACH, nie miesiącach).*  
*To oznacza odsetki proste — są także odsetki złożone, ale na razie nie musisz się nimi przejmować.*  
*Wyjściowa kwota pożyczki. Kapitał.*

Bank oferuje trzy różne okresy spłaty. Dla każdego z nich jest inne oprocentowanie. Musimy obliczyć całkowitą kwotę odsetek dla każdego okresu spłaty, a następnie podstawić do równania wyjściowego, aby uzyskać wysokość miesięcznej raty, jaką będzie musiał zapłacić Marek:

$$O_{\text{proste}} = (p \cdot K_0)n \quad \frac{(\text{Kapitał} + \text{Odsetki})}{\text{Liczba rat}} = \text{Miesięczna rata} \star$$



Zaostrz ołówek

Oblicz odsetki dla pierwszej opcji: 3 lata przy stawce oprocentowania 3,0%.

$$O_{\text{proste}} = (p \cdot K_0)n$$

*Należy uważać, aby liczby miały odpowiednią postać (postać dziesiętną procentu).*

$$O_{\text{proste}} = (\dots \cdot 24\,000) \dots$$

.....

.....

## Przeliczenie wysokości rat



Zaostrz ołówek:  
Rozwiązanie

Oblicz odsetki dla pierwszej opcji: 3 lata przy stawce oprocentowania 3,0%.

$$\begin{aligned} O_{\text{proste}} &= (p \cdot K_0) n \\ O_{\text{proste}} &= (0,03 \cdot 24\,000) \cdot 3 \\ O_{\text{proste}} &= (720) \cdot 3 \\ O_{\text{proste}} &= 2\,160 \end{aligned}$$

3,0% w postaci dziesiętnej to 0,03.

Pamiętajmy, ten okres spłaty jest wyrażony w LATACH, a nie miesiącach.

25 000–1000 pierwszej wpłaty

To oznacza, że całkowita kwota odsetek dla 3-letniego okresu spłaty wyniesie 2160 €.

## PODSTAWIAMY obliczoną wartość w celu wyliczenia wysokości miesięcznej raty

Musimy obliczyć całkowitą kwotę odsetek dla każdego okresu spłaty, a następnie podstawić do równania wyjściowego, aby uzyskać wysokość miesięcznej raty, jaką będzie musiał zapłacić Marek:

Teraz znamy tę wielkość.

24 000 €

$$\frac{(\text{Kapitał} + \text{Odsetki})}{\text{Liczba rat}} = \text{Miesięczna rata}$$

Teraz powinno się udać obliczenie tej wartości.

To jest liczba miesięcy:  
3 lata razy 12 miesięcy w roku.

To jest całkowita kwota odsetek znana z poprzednich wyliczeń.

$$\frac{(24\,000 + 2\,160)}{3 \cdot 12} = 726,67 > 550 \text{ €}$$

Na tyle Marek może sobie pozwolić.

Tyle wynosi wysokość miesięcznej raty dla opcji nr 1.

Nie stać mnie na tyle!  
A co z dłuższymi okresami  
spłaty? Naprawdę chcę mieć  
ten samochód!





## Zaostrz ołówek

Sprawdź, czy Marek będzie mógł sobie pozwolić na dowolną z pozostałych opcji czasu spłaty — okres 4-letni lub 5-letni.

Opcja nr 2: 4 lata przy stawce oprocentowania 3,5%.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Opcja nr 3: 5 lat przy stawce oprocentowania 4,0%.

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## Zaostż ołówek: Rozwiązanie

Twoim zadaniem było sprawdzenie, czy Marek będzie zdolny do spłaty pożyczki w terminie czterech lub pięciu lat.

Opcja nr 2: 4 lata przy stawce oprocentowania 3,5%.

$$O_{\text{proste}} = (p \cdot K_0) n$$

*Uważaj na przecinek dziesiętny w tym miejscu.*

$$O_{\text{proste}} = (0,035 \cdot 24\ 000) 4$$

$$O_{\text{proste}} = (840) 4$$

$$O_{\text{proste}} = 3360$$

*To jest łączna kwota odsetek do zapłacenia w ciągu całego okresu spłaty pożyczki.*

*Podstawienie do równania utworzonego wcześniej.*

$$\frac{(24\ 000 + 3\ 360)}{4 \cdot 12} = 570$$

$$570\text{€} > 550\text{€}$$

*Taka wysokość miesięcznej raty jest wciąż za wysoka. Marek ma nadzieję, że następna opcja będzie do przyjęcia!*

Opcja nr 3: 5 lat przy stawce oprocentowania 4,0%.

$$O_{\text{proste}} = (p \cdot K_0) n$$

$$O_{\text{proste}} = (0,04 \cdot 24\ 000) 5$$

$$O_{\text{proste}} = (960) 5$$

$$O_{\text{proste}} = 4\ 800$$

*Marek będzie winien 28 800 €... kapitał plus 4 800 € odsetek.*

$$\frac{(24\ 000 + 4\ 800)}{5 \cdot 12} = 480$$

$$480\text{€} < 550\text{€}$$

*Świetnie! Taka rata odpowiada! Marek może sobie pozwolić na samochód, jeśli zaciągnie pożyczkę o najdłuższym okresie spłaty. Co więcej, co miesiąc zostanie mu 70 €...*



## WYSIL SZARE KOMÓRKI

Jaka jest **rzeczywista** cena samochodu, jeśli uwzględnimy odsetki różnych opcji kredytu?  
Co by było, gdyby Marek mógł dokonać pierwszej wpłaty w wyższej wysokości?  
Co by było, gdyby poczekał dłużej, tak by mógł płacić więcej, kiedy już dostanie pracę?



Nie istnieją  
głupie pytania

**P:** Dlaczego równanie odsetek jest tak skomplikowane?

**U:** Równanie, które wykorzystaliśmy do obliczania odsetek, to standardowe równanie służące do obliczania odsetek prostych. W rzeczywistości nie jest ono skomplikowane, chociaż dodatkowe litery i oznaczenia powodują, że na pierwszy rzut oka wydaje się ono złożone.

**P:** W jaki sposób działa równanie do obliczania odsetek?

**U:** Równanie:  $O_{\text{proste}} = (p \cdot K_0) \cdot n$  jest właściwie dość proste. Mówi ono, że całkowita kwota odsetek pożyczki jest równa stopie procentowej pomnożonej przez pożyczoną kwotę i czas, na jaki pożyczono pieniądze.

Co z tego wynika? Na koszty pożyczki składają się dwie rzeczy: wysokość stopy procentowej oraz czas, na jaki pożyczamy pieniądze.

**P:** Podczas obliczania odsetek okazało się, że przy pięcioletnim okresie spłaty trzeba oddać więcej pieniędzy, ale miesięczna rata jest niższa. Dlaczego tak jest?

**U:** W przypadku pożyczek tego rodzaju czas spłaty ma większy wpływ na wysokość spłacanej kwoty od stopy odsetek. Dodanie roku spłaty do pożyczki to 12 dodatkowych rat. To znacznie więcej odsetek, ale są one rozłożone na dodatkowych 12 miesięcy. W efekcie miesięczna rata jest niższa.

Warto zapamiętać, że pożyczka zaciągnięta na dłuższy okres dość znacząco podniesie cenę samochodu. Krótsza pożyczka oznacza mniej odsetek, a tym samym niższy całkowity koszt. Krótszy okres spłaty jest lepszy, jeśli możemy sobie na niego pozwolić.



## CELNE SPOSTRZEŻENIA

- W przypadku rozwiązywania praktycznych problemów w równaniach często trzeba wprowadzać **ograniczenia** i przekształcać je na **funkcje**.
- Obliczanie odsetek polega na wyznaczeniu niewiadomej z równania.
- Z równania odsetek wynika, że **czas spłaty pożyczki** i **oprocentowanie** mają wpływ na wysokość miesięcznej raty.
- Ubezpieczenie samochodu jest **stałą**, a nie zmienną. To stała kwota.



## **Marek jeszcze nie jest właścicielem tego samochodu...**

Marek jest gotów do zakupu. Może wpłacić 1000 € pierwszej wpłaty oraz zaciągnąć na pięć lat kredyt oprocentowany na 4% z ratą miesięczną. Stać go nawet na wykupienie polisy ubezpieczeniowej.

Jest jednak jeszcze coś, co należy wziąć pod uwagę...



## Czat IM: Samochody tracą na wartości



Jola

Ten facet oferuje mi coś, czego nie rozumiem.  
Co to jest ubezpieczenie GAP, o którym on mówi?

Cóż, wiesz przecież, że samochody bardzo szybko tracą na wartości. Problem polega na tym, że samochody najczęściej tracą na wartości na początku. Dlatego błyskawicznie są warte mniej, niż się pożyczyło.



Krystyna



Jola

Naprawdę? Czy to znaczy, że Marek będzie winien bankowi więcej pieniędzy?

Nie, Marek w rzeczywistości nie będzie winien bankowi więcej, tylko jego samochód będzie wart znacznie mniej. Ten mechanizm działa następująco: powiedzmy, że Marek pożyczył 28 800 €, których potrzebował na zakup samochodu (24 000 € plus odsetki). Z powodu spadku wartości samochód będzie wart około 20 000 € natychmiast po wyjeździe od diler.



Janek



Krystyna

A zatem gdyby Marek miał wypadek w drodze od diler do domu, to dostałby z agencji ubezpieczeniowej 20 000 €, ponieważ tyle byłby wart jego samochód. Czy pomimo to w dalszym ciągu byłby winien bankowi 28 800 €? Wydaje się, że to niesprawiedliwe...

Cóż, nie dość, że byłby winien bankowi 8800 €, **to jeszcze** nie miałby samochodu.



Jola



Krystyna

Właśnie. To, co próbuje sprzedać handlarz, nazywa się ubezpieczeniem GAP. Pokrywa ono różnicę pomiędzy wartością samochodu a kwotą, jaką nabywca jest winien bankowi.

Ale to kolejna rzecz do zapłaty. Czy Marka na to stać? Czy warto kupić takie ubezpieczenie?



Jola



Janek

...

Trzeba przytoczyć kilka liczb, aby to obliczyć...

## Oblicz, ile jest wart samochód

Założmy, że Marek otrzymał wyciąg z banku dotyczący swojej pożyczki... oto jak mógłby on wyglądać.

Marek jest winien bankowi 24 000 € plus 4800 € odsetek.

|                                                                        |          |
|------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Saldo kredytu</b>                                                   | 28 800 € |
| <b>Cena samochodu rocznik 2009<br/>— bieżąca, zdevaluowana wartość</b> | 20 000 € |

Po wyjeździe z parkingu u dilerą samochód Marka jest wart tylko 20 000 €.

## Deprecjacja to smutna rzeczywistość

Przedmioty szybko się starzeją... zwłaszcza samochody. Opony, hamulce, płyny i silnik zużywają się wraz z każdym przejechanym kilometrem. Dlatego właśnie używane samochody są tańsze od nowych.

**Deprecjacja** to pojęcie opisujące ubytek wartości samochodu. **Zdeprecjonowana wartość** to cena samochodu pomniejszona o kwotę depreciation. Inaczej mówiąc, jest to wartość samochodu w określonym momencie.

Niestety, samochody tracą około 20% swojej wartości natychmiast po wyjeździe od sprzedawcy. Następnie tracą pozostałą swoją wartość w ciągu około 10 lat. Po tym okresie są w zasadzie nic niewarte.

To jest funkcja zdefiniowana w wielu przedziałach! Zapomniałeś, co to znaczy? Więcej informacji znajdziesz w rozdziale 10.

## Bank w dalszym ciągu ma swoje pieniądze

Wartość samochodu spada szybciej niż tempo, w jakim spłaca się kredyt. Istnieje zatem różnica pomiędzy kwotą, jaką jesteśmy winni bankowi, a wartością samochodu.

Kwota długu spada ze stałą szybkością, w miarę jak co miesiąc spłacamy bankowi raty.



Istnieje luka... różnica pomiędzy wartością samochodu a kwotą, którą jesteśmy winni bankowi.

Samochód jest jednak zwykle wart mniej od kwoty długu.



### Ćwiczenie

W celu wymodelowania luki musisz określić kilka funkcji. Napisz funkcję salda pożyczki Marka, a następnie funkcję deprecjacji zdefiniowaną w kilku przedziałach. Nie zapominaj o dziedzinach.

Obie funkcje będą oznaczone jako  $w(t)$   
— wartość w zależności od czasu.

Saldo kredytu: .....

.....

.....

.....

.....

Dziedzina: .....

Założmy, że samochód traci na wartości równomiernie w ciągu 10 lat... poza pierwszym spadkiem o 20%.

Zdeprecjonowana wartość samochodu: .....

.....

.....

.....

.....

Dziedzina: .....

## Ćwiczenie: rozwiązanie



W celu wymodelowania luki musisz określić kilka funkcji. Napisz funkcję salda pożyczki Marka, a następnie funkcję deprecjacji zdefiniowaną w kilku przedziałach. Nie zapominaj o dziedzinach.

### Ćwiczenie: Rozwiązanie

Ten zapis oznacza wartość pożyczki w funkcji czasu.

Znak minus oznacza, że spłata każdej raty zmniejsza kwotę długu.

480 miesięcznie razy  $t$  — liczba miesięcy.

Saldo kredytu:  $w(t) = 28\,800 - 480t$

Ta liczba oznacza całkowity koszt pożyczki: kapitał plus odsetki, które obliczyliśmy wcześniej.

Dziedzina:  $0 \leq t \leq 60$

Dziedzina tej funkcji rozpoczyna się w chwili, kiedy Marek kupił samochód, i trwa 60 miesięcy (pięć lat) — tyle wynosi okres spłaty pożyczki.

Fragment nr 1 funkcji

Początkowa wartość samochodu

minus deprecjacja

Ten wyraz oznacza 20% początkowej wartości samochodu razy  $t$ .

Zdeprecjonowana wartość samochodu:  $w(t) = 25\,000 - 0,2(25\,000)t$

$w(t) = 25\,000 - 5000t$   $0 \leq t < 1$  Ta relacja jest prawdziwa tylko dla pierwszego miesiąca — fragment nr 1 funkcji.

Fragment nr 2 funkcji

Najpierw oblicz, ile jest wart samochód po pierwszym spadku ceny.

$$= 25\,000 - 0,2(25\,000) = 20\,000$$

Nowa wartość początkowa

$$w(t) = 20\,000 - \frac{0,1}{12}(20\,000)t$$

Wiemy, że cena samochodu spada w ciągu 10 lat. Średni spadek wartości wynosi zatem 10% rocznie.

To w dalszym ciągu jest funkcja wartości samochodu w czasie, ale dla  $t \geq 1$ .

$$w(t) = 20\,000 - 166t$$

Podziel tę wartość przez 12, aby przekształcić stopę roczną na miesięczną.

Dziedzina:  $2 \leq t \leq 60$

Ta relacja jest prawdziwa dla pozostałego czasu życia pożyczki: 60 miesięcy.

**Podsumujmy — uzyskujemy łączny obraz funkcji opisującej „lukę”:**

$$w(t) = \begin{cases} 25\,000 - 5000t & 0 \leq t \leq 1 \\ 20\,000 - 166t & 1 < t \leq 60 \end{cases}$$

$$w(t) = 28\,800 - 480t \quad 0 \leq t \leq 60$$

Układy równań i układy funkcji rozwiązuje się dokładnie tak samo.

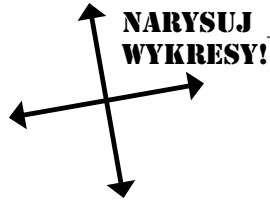
**Funkcji!**

**To jest układ równań!**

Z technicznego punktu widzenia równania są przecież funkcjami.

Hej! To zwykły układ równań. Jeśli narysujemy jego wykres, będziemy mogli „zobaczyć” lukę i znajdziemy miejsce, w którym się ona kończy.

o o

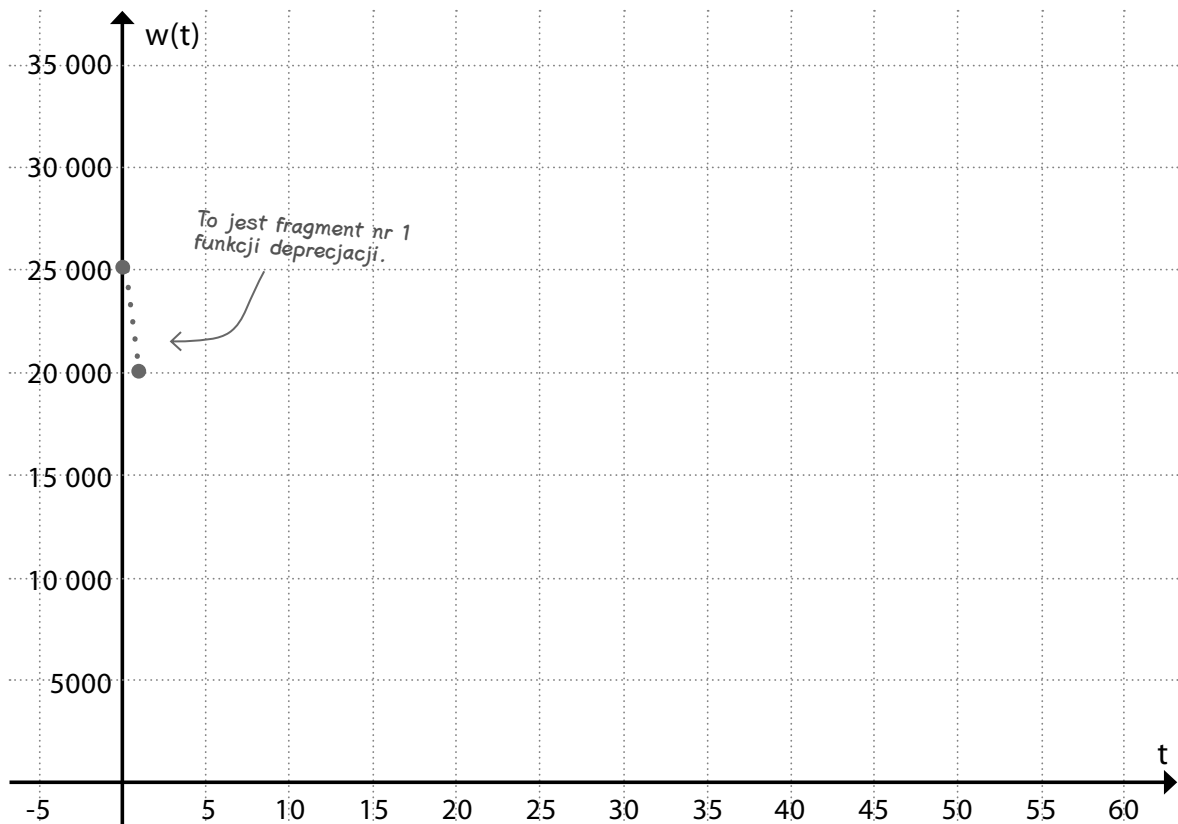


**NARYSUJ  
WYKRESY!**

Narysuj wykres obu funkcji, aby „zobaczyć” lukę. Zaczęliśmy za Ciebie, wykreślając pierwszą część wykresu deprecjacji.

Deprecjacja  $\rightarrow w(t) = \begin{cases} 25\,000 - 5000t & 0 \leq t \leq 1 \\ 20\,000 - 166t & 1 < t \leq 60 \end{cases}$

Saldo kredytu  $\rightarrow w(t) = 28\,800 - 480t \quad 0 \leq t \leq 60$



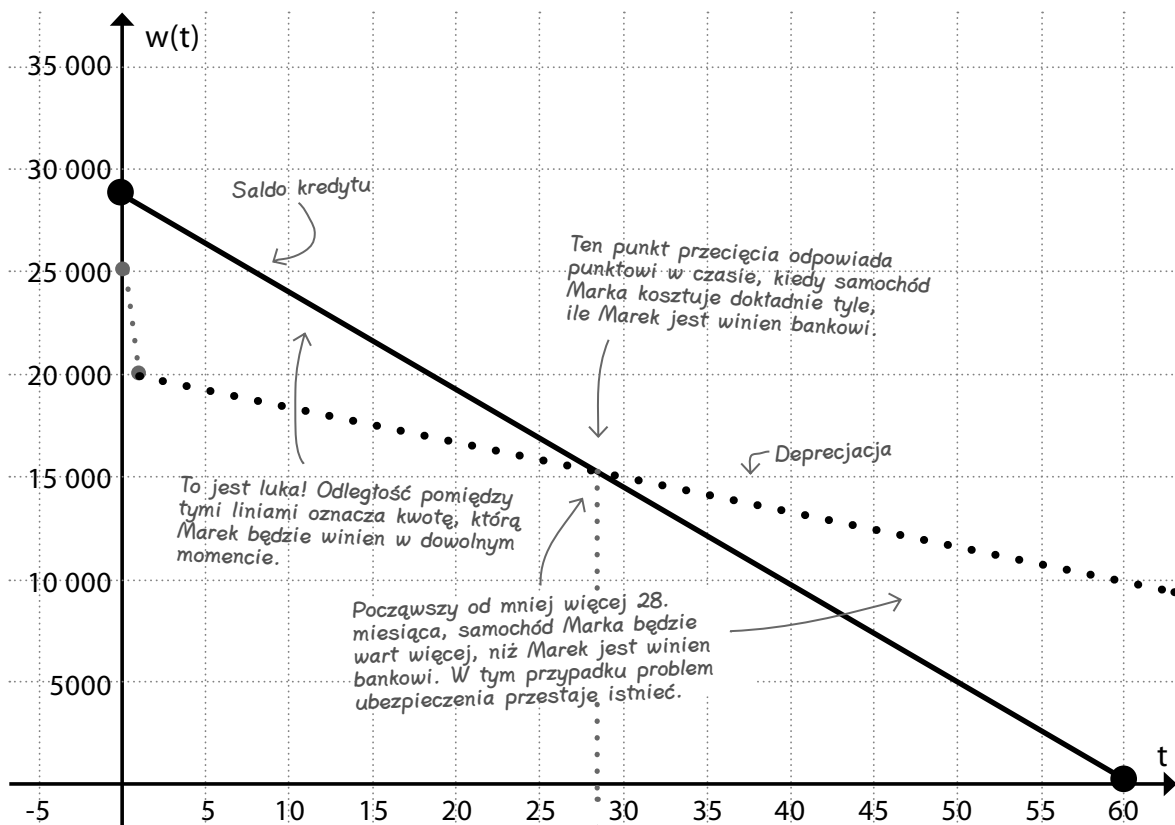
**NARYSUJ WYKRESY!**

**ROZWIĄZANIE**

Twój zadaniem było narysowanie wykresu układu równań reprezentującego lukę. Jakie efekty uzyskałeś?

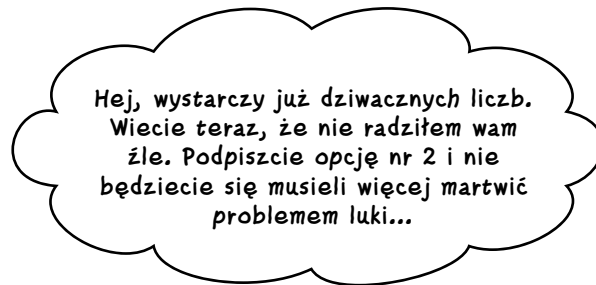
Deprecjacja  $\rightarrow w(t) = \begin{cases} 25\,000 - 5000t & 0 \leq t \leq 1 \\ 20\,000 - 166t & 1 < t \leq 60 \end{cases}$

Saldo kredytu  $\rightarrow w(t) = 28\,800 - 480t \quad 0 \leq t \leq 60$



Marek ponosi ryzyko „luki” w wartości przez ponad 25 miesięcy. To ponad dwa lata! Lepiej jeźdź ostrożnie, Marku...





## Ubezpieczenie GAP — okresy i opłaty

To ubezpieczenie pokryje różnicę pomiędzy wartością samochodu a kwotą kredytu w sytuacji wypadku.

### Option #1

18-miesięczna ochrona — 20 € miesięcznie

### Option #2

3-letnia ochrona — 60 € miesięcznie

Co powinien zrobić Marek?  
Czy powinien wykupić ubezpieczenie GAP?  
Jeśli tak, to która opcja jest lepsza?

## Dzięki algebrze nie musisz bawić się w ZGADYWANIE

Marek zdecydowanie potrzebuje ubezpieczenia GAP w celu ochrony w okresie, kiedy jego samochód będzie wart mniej, niż Marek jest winien bankowi. Którą opcję powinien jednak wykupić? Pierwszą czy drugą?

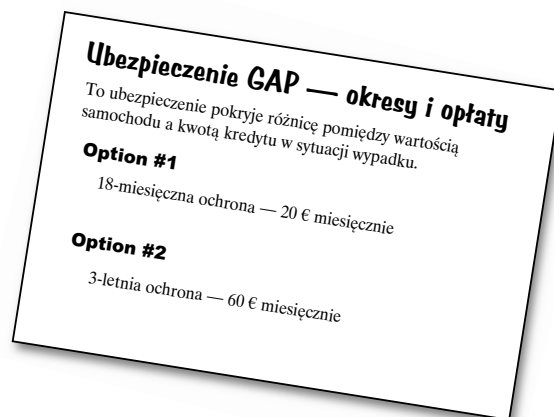
Dzięki wykresowi, funkcjom i Twoim diabelskim umiejętnościom z algebry możesz to wyliczyć. Musisz określić maksymalne potencjalne ryzyko Marka w dowolnym czasie oraz wziąć pod uwagę, ile kosztują poszczególne opcje ubezpieczenia GAP. Powinieneś również wziąć pod uwagę miesięczny budżet Marka oraz całkowity koszt każdej opcji ubezpieczenia GAP.

### ...pamiętaj jednak o kontekście problemu

Najpierw powinniśmy się dowiedzieć, na jaki wydatek może sobie pozwolić Marek, biorąc pod uwagę kwotę rat kredytu oraz wcześniejszych ubezpieczeń. Nie jest to jednak jedyna rzecz, o którą Marek musi się martwić.

Oto co należy zrobić:

- 1 Oblicz, na jaki wydatek stać Marka.**  
Oblicz, ile pozostaje mu pieniędzy po dokonaniu zakupów, i sprawdź, czy stać go na którąkolwiek z opcji ubezpieczenia GAP.
- 2 Oblicz koszty opcji nr 1.**  
Oblicz najgorszy przypadek luki w ciągu pierwszych 18 miesięcy (to jest ryzyko, jakie ponosi Marek) oraz całkowitą kwotę, jaką będzie musiał zapłacić Marek za tę opcję ochrony ubezpieczeniowej.
- 3 Oblicz koszty opcji nr 2.**  
Oblicz najgorszy przypadek luki w okresie pomiędzy 18. miesiącem a 3 latami (to jest dodatkowe ryzyko, przed którym chroni opcja nr 2) oraz całkowitą kwotę, jaką będzie musiał zapłacić Marek w ciągu trzech lat za tę opcję ochrony ubezpieczeniowej.
- 4 Wybierz najrozsądniejszy wariant.**  
Posługując się nowymi informacjami oraz wykresem luki, zdecyduj, który plan jest najbardziej rozsądny. Jaką opcję powinien wybrać Marek?





## Zaostrz ołówek

Wykorzystaj to miejsce do wykonania obliczeń dotyczących problemu ubezpieczenia GAP Marka.

1 Oblicz, na jaki wydatek stać Marka. ....

.....

.....

2 Oblicz koszty opcji nr 1. ....

.....

.....

.....

.....

.....

3 Oblicz koszty opcji nr 2. ....

.....

.....

.....

.....

4 Wybierz jedną z opcji!.....

Zaostrz ołówek:  
Rozwiązanie

Twoim zadaniem było wybranie najlepszej opcji ubezpieczenia GAP dla Marka.

- 1 Oblicz, na jaki wydatek stać Marka.

Obliczyliśmy to na stronie 446,  
kiedy Marek wybierał wariant  
kredytu.

$$\frac{(24\,000 + 4\,800)}{5 \cdot 12} = 480$$

$$480\text{€} < 550\text{€}$$

Świetnie! Taką ratę odpowiada! Marek może  
sobie pozwolić na samochód, jeśli zaciągnie  
pożyczkę o najdłuższym okresie spłaty.  
Dodatkowo zostanie mu 70 €.

- 2 Oblicz koszty opcji nr 1. Największa luka występuje w ciągu pierwszych

18 miesięcy — po początkowym spadku ceny. Wysokość spadku wynosi około 8000 €.

Liczba miesięcy — Miesięczna składka

Składki do zapłacenia =  $18(20) = 360\text{€}$  ← Razem składki przy opcji nr 1

↑  
Maksymalne ryzyko,  
jakie ponosi Marek

Składka wynosi 20 € miesięcznie, na co Marek bez trudu może sobie pozwolić.

A zatem za kwotę 360 € Marek zabezpiecza maksymalne możliwe ryzyko utraty 8000 €.

- 3 Oblicz koszty opcji nr 2. Najgorsza luka w okresie pomiędzy 18. miesiącem a 3 latami wynosi około 2000 €.

Liczba miesięcy — Miesięczna składka

Składki do zapłacenia =  $36(60) = 2160\text{€}$  ← Razem składki przy opcji nr 2

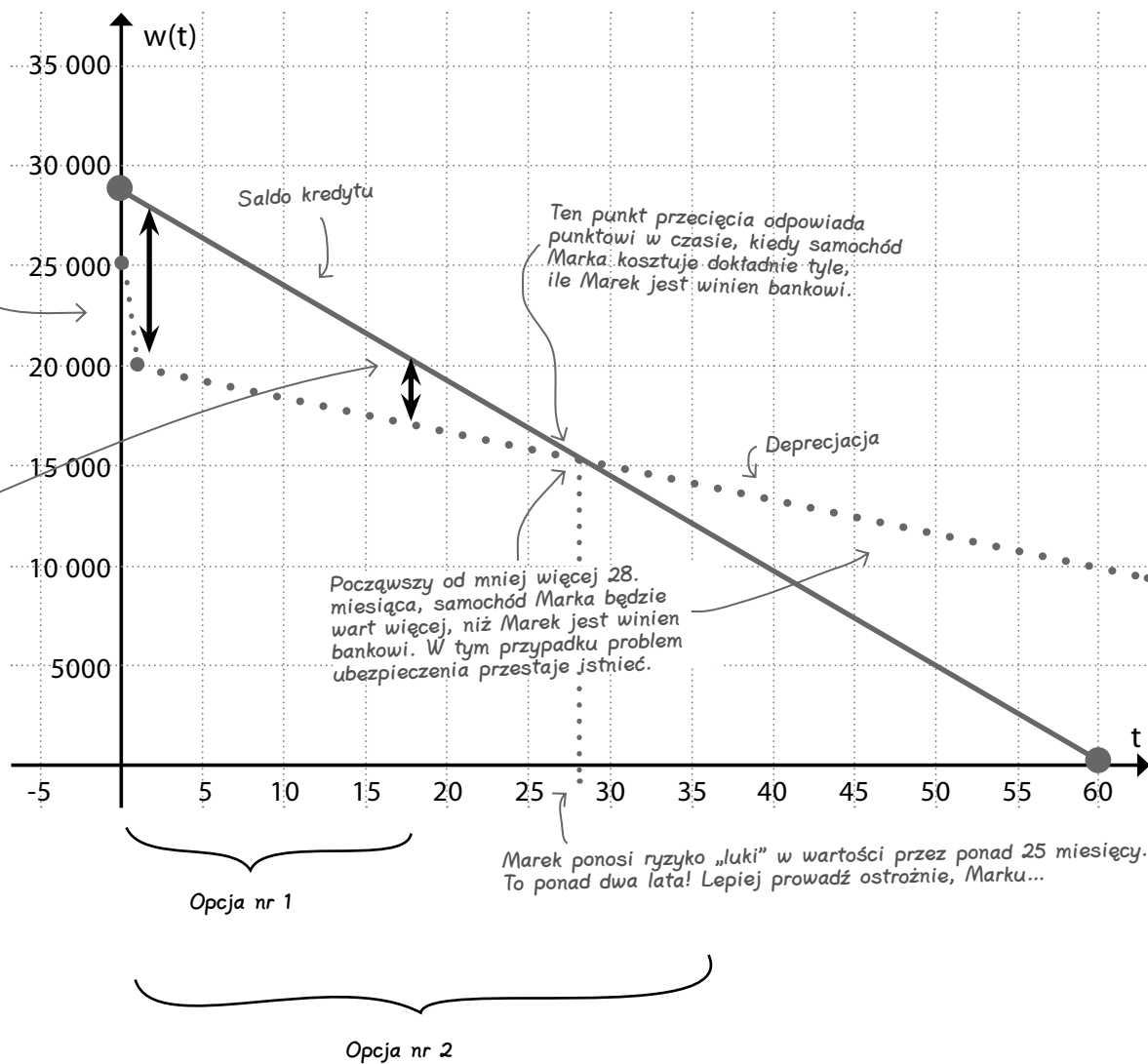
Całkowite maksymalne ryzyko  
w dalszym ciągu wynosi 8000 €  
w ciągu kilku pierwszych  
miesięcy. Jednak pomiędzy  
miesiącem 18. a 19. maksymalne  
ryzyko niezabezpieczone przez  
opcję nr 1 wynosi 2000 €.

Składka wynosi 60 € miesięcznie, na co Marek również może sobie pozwolić.

Za całkowitą kwotę 2160 € Marek zabezpiecza to samo ryzyko 8000 €, jak w opcji 1.

Dodatkowo zabezpiecza ryzyko utraty 2000 €, która mogłaby nastąpić po upływie okresu ochrony planu nr 1.

- 4 Wybierz jedną z opcji! Nie warto wybierać opcji nr 2! Marek musiałby zapłacić dodatkowo 1800 €  
(koszt opcji nr 2 – koszt opcji nr 1), aby zabezpieczyć dodatkowe ryzyko utraty 2000 €.  
A zatem zapłacenie dodatkowych składek pozwoliłoby Markowi potencjalnie zaoszczędzić  
200 €! Lepiej wybrać opcję nr 1 i ostrożnie jeździć pomiędzy 19. i 28. miesiącem!



## Marek chce Ci płacić za to, byś stał się jego planistą finansowym

Marek jest podekscytowany tym, że pomogłeś mu zaoszczędzić tyle pieniędzy, a jednocześnie zdobyć samochód swoich marzeń. Obiecał nawet w dalszym ciągu korzystać z Twoich usług doradcy przy podejmowaniu decyzji finansowych... i powiedzieć o Tobie swoim przyjaciółom!

Aby doradzić Markowi, wykorzystałeś wiele zaawansowanych umiejętności algebraicznych:

- Przedstawianie równań w kontekście zmiennych.
- Korzystanie z funkcji z ograniczeniami dla dziedziny i przeciwdziedziny.
- Rysowanie wykresów funkcji i czytanie wyników.
- Rozwiązanie układów równań i funkcji.



Przyjechałem tutaj moim nowym samochodem! Jestem zabezpieczony przed wypadkiem we wczesnym okresie posiadania samochodu i stać mnie na opłaty. Nie ma problemu. Twoje rady były doskonałe!

Hej! My też chcemy skorzystać z Twoich usług. Jakie są Twoje warunki?

### Możesz otworzyć firmę!

Dzięki Twojemu sukcesowi z Markiem w kolejce ustawiło się wiele osób, które tylko czekają, aby zapłacić Ci za porady finansowe. Najlepiej będzie, jeśli otworzysz biuro... i wykorzystasz algebrę do zaplanowania swojej własnej finansowej przyszłości!

