

Maciej Gonet

ZROZUMIEĆ EXCELA

OBLICZENIA I WYKRESY



Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiejkolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Projekt okładki: Studio Gravite / Olsztyn
Obarek, Pokoński, Pazdrijowski, Zaprucki

Grafika na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.com

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
<http://helion.pl/user/opinie/zrexow>
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-283-5693-1

Copyright © Helion 2020

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

Spis treści

Wstęp	15
Rozdział 1. Graficzna prezentacja danych	23
Rodzaje wykresów dostępnych w Excelu	23
<i>Wykres punktowy a wykres liniowy — podobieństwa i różnice</i>	<i>24</i>
Przygotowanie danych do wykresu punktowego	26
Wykonanie wykresu punktowego	26
<i>Zastosowanie skali logarytmicznej</i>	<i>28</i>
<i>Serie danych różniące się o rzędy wielkości na jednym wykresie</i>	<i>29</i>
<i>Modyfikacja zakresu danych wykresu</i>	<i>29</i>
<i>Bezpośrednie definiowanie zakresów danych wykresu</i>	<i>30</i>
<i>Wykorzystanie funkcji SERIE do modyfikacji danych wykresu</i>	<i>30</i>
<i>Punkty wykresu połączone linią</i>	<i>31</i>
<i>Wykorzystanie zakresów złożonych przy definiowaniu danych do wykresu</i>	<i>32</i>
<i>Niestandardowe użycie funkcji UDF przy definiowaniu danych do wykresu</i>	<i>36</i>
<i>Dynamiczne definiowanie zakresu danych do wykresu</i>	<i>36</i>
<i>Uwaga na błędy w przypadku, gdy dane do wykresu określają formuły</i>	<i>37</i>
<i>Wykresy a zmiana sposobu wyświetlania liczb</i>	<i>38</i>
Kopiowanie wykresów z arkusza do arkusza	38
Automatyczne skalowanie osi wykresu	40
Dodawanie słupków błędów do wykresu	41
<i>Sposób obliczania błędu i odchylenia standardowego</i>	<i>42</i>
<i>Wskazówki praktyczne</i>	<i>44</i>
<i>Wykresy niestandardowe wykonywane z wykorzystaniem słupków błędów</i>	<i>45</i>
Dodawanie linii trendu (regresji) do wykresu	47
Wykresy radarowe	50
Wykresy powierzchniowe	52
Małe wykresy przebiegu w czasie	54

Rozdział 2. Wykresy punktowe w przykładach	57
Typowy wykres funkcji opisanej wzorem	57
Użycie formuł nazwanych przy definiowaniu danych wykresu	58
Wykres dynamiczny prezentujący najnowsze dane	58
Dane wykresu określone formułami nazwanymi	59
<i>Funkcja ciągła</i>	59
<i>Funkcja nieciągła</i>	61
Wykres prezentujący wybrane serie danych	62
Stopniowe ujawnianie danych na wykresie	63
<i>Wyświetlanie kolejnych punktów w serii danych</i>	63
<i>Wyświetlanie kolejnych serii danych</i>	64
Wykres z zaznaczenia	64
Wykres prezentujący proste figury geometryczne	65
Wykres przedstawiający wielokąty foremne	65
Wykresy dynamiczne	68
Umieszczanie etykiet tekstowych przy punktach wykresu	70
Usuwanie szumów z danych przed wykonaniem wykresu	72
Cieniowanie obszaru między osią a wykresem lub między dwiema liniami na wykresie	74
Nierównomierna skala na osiach wykresu punktowego	76
Rozdział 3. Zaokrąglanie liczb i obliczenia przybliżone	81
Pojęcie błędu pomiaru	81
<i>Błąd bezwzględny i błąd względny</i>	81
<i>Błąd maksymalny wielkości zależnej</i>	82
<i>Błąd średni wielkości zależnej</i>	83
Przybliżenia dziesiętne	84
<i>Cyfry znaczące</i>	84
<i>Cyfry dokładne</i>	85
<i>Zasady zaokrąglania liczb</i>	86
Zasady obliczeń przybliżonych	86
<i>Dodawanie i odejmowanie</i>	87
<i>Mnożenie i dzielenie</i>	88
<i>Potęgowanie i pierwiastkowanie</i>	88
<i>Obliczanie logarytmu i antylogarytmu liczby (funkcji wykładniczej)</i>	88
<i>Rozwiązanie równania kwadratowego</i>	88
Rachunki przybliżone bez szacowania błędów	90
Dokładność obliczeń w Excelu i jej konsekwencje	90
Formatowanie komórek zawierających liczby a zaokrąglanie	92
Przegląd funkcji służących do zaokrąglania	94
<i>Funkcje zaokrągleń, które wymagają podania liczby cyfr po przecinku</i>	95
<i>Funkcje zaokrągleń, w których dokładność jest określona w sposób bezwzględny</i>	96

<i>Funkcja, w której dokładność zaokrąglenia jest określona przez kod formatu</i>	98
<i>Zaokrąglenie liczb z uwzględnieniem cyfr znaczących</i>	100
<i>Nietypowy sposób zaokrąglenia</i>	101
<i>Zaokrąglenie wartości czasu</i>	101
Wyodrębnianie części całkowitej i części ułamkowej liczby	102
Rozdział 4. Różniczkowanie numeryczne	105
Pojęcie pochodnej	105
Numeryczne obliczanie pochodnej funkcji danej wzorem	108
Numeryczne różniczkowanie danych pomiarowych	110
<i>Bezpośrednie oszacowanie wartości pochodnych na podstawie danych pomiarowych</i>	110
<i>Obliczenie pochodnej za pośrednictwem funkcji aproksymującej</i>	111
Rozdział 5. Rozwiązywanie równań nieliniowych	115
Równanie kwadratowe	115
Graficzne oszacowanie pierwiastków	118
Metoda iteracji prostej	119
Metoda siecznych (regula fałsi)	123
Przyspieszenie zbieżności metody siecznych	125
Metoda stycznych (Newtona)	125
Zmodyfikowana metoda stycznych	126
Inne warianty metody siecznych	128
Zamierzone użycie odwołań cyklicznych przy rozwiązywaniu równań	129
Wykorzystanie narzędzi Szukaj wyniku i Solver	131
<i>Procedura Szukaj wyniku</i>	131
<i>Dodatek Solver</i>	133
Specyfika rozwiązywania równań wielomianowych	134
<i>Liczba pierwiastków</i>	135
<i>Rozkład na czynniki</i>	135
<i>Obliczanie wartości wielomianu</i>	135
<i>Wzory Viéte'a</i>	137
<i>Inne użyteczne obserwacje</i>	138
<i>Pochodna i całka wielomianu</i>	138
<i>Równania trzeciego stopnia</i>	140
<i>Równania czwartego stopnia</i>	142
Rozdział 6. Układy równań liniowych i nieliniowych	145
Zapis układu równań liniowych i jego rozwiązania w formie macierzowej	145
Przebieg rozwiązania w Excelu	146
Wykorzystanie Solvera do rozwiązywania układu równań liniowych	149
<i>Minimalizacja sumy kwadratów odchyłeń</i>	149
<i>Zerowanie odchyłeń w warunkach ograniczających</i>	150

Układy złożone z dwóch równań nieliniowych	151
<i>Wstępna analiza układu równań</i>	151
<i>Próby rozdzielenia zmiennych w równaniu z dwiema niewiadomymi</i>	152
<i>Procedura rozwiązywania układu równań</i>	153
Układy złożone z co najmniej trzech równań nieliniowych	160
<i>Rozwiązanie z wykorzystaniem Solvera</i>	160
<i>Metoda Newtona-Raphsona</i>	161
Rozdział 7. Regresja liniowa jednowymiarowa	165
Zakres zastosowania regresji liniowej	165
Ocena statystyczna danych pomiarowych i jakości dopasowania równania regresji	168
<i>Charakterystyka zbiorów danych pomiarowych</i>	168
<i>Ocena zależności między zbiorami danych pomiarowych</i>	169
<i>Zasady doboru współczynników w równaniu regresji</i>	171
Regresja liniowa w Excelu	172
<i>Znaczenie współczynników w równaniu regresji i sposoby ich obliczania</i>	172
<i>Równanie ze znanym wyrazem wolnym lub bez niego</i>	177
<i>Równanie ze znanym współczynnikiem kierunkowym</i>	180
<i>Specyfika działania funkcji REGLINP przy braku wyrazu wolnego</i>	181
<i>Nietypowe zastosowania funkcji REGLINP</i>	182
<i>Przykłady wyznaczania równań regresji</i>	185
Rozdział 8. Regresja liniowa wielowymiarowa	193
Regresja wielomianowa dla jednej zmiennej	193
<i>Funkcja REGLINW</i>	194
<i>Funkcja REGLINX</i>	195
Regresja liniowa w przypadku równania w postaci zlogarytmowanej	196
<i>Funkcja REGEXPP</i>	197
<i>Funkcja REGEXPW</i>	198
<i>Zależności typu potęgowego</i>	200
Regresja liniowa w przypadku wielomianu dwu zmiennych	202
<i>Przygotowanie danych do użycia funkcji REGLINP lub REGLINW</i>	202
<i>Regresja wielomianem</i>	203
Współczynniki korelacji i determinacji w modelach wielowymiarowych	205
Skorygowany współczynnik determinacji	207
Regresja danych o niejednakowej dokładności	209
Rozdział 9. Regresja nieliniowa	213
Zakres zastosowania regresji nieliniowej	213
<i>Linearyzacja równania przez rozwinięcie w szereg Taylora</i>	213
<i>Regresja quasi-liniowa</i>	215

Ocena statystyczna jakości dopasowania równania regresji	217
Regresja nieliniowa z wykorzystaniem Solvera	217
<i>Regresja logistyczna</i>	217
<i>Porównanie regresji quasi-liniowej i nieliniowej</i>	222
Regresja nieliniowa metodą iteracyjną	229
Korelacja liniowa i korelacja nieliniowa w Excelu	231
<i>Korelacja liniowa</i>	233
<i>Korelacja nieliniowa z wykorzystaniem Solvera</i>	235
Prognozowanie i funkcje służące do tego celu	236
Rozdział 10. Interpolacja w tablicach danych	241
Interpolacja liniowa	241
Trend liniowy	244
Interpolacja kubiczna (wielomianem trzeciego stopnia)	245
Interpolacja za pomocą funkcji sklepanych	246
<i>Implementacja w Excelu</i>	249
Interpolacja liniowa w przypadku funkcji dwu zmiennych	251
<i>Interpolacja etapowa bez wykorzystania funkcji</i>	251
<i>Interpolacja z użyciem funkcji REGLINW</i>	252
Interpolacja kubiczna w przypadku funkcji dwu zmiennych	254
<i>Interpolacja bez wykorzystania funkcji</i>	254
<i>Interpolacja z użyciem funkcji REGLINP lub REGLINW</i>	256
Rozdział 11. Obliczanie całek oznaczonych metodami numerycznymi	257
Interpretacja geometryczna całki oznaczonej	257
Sposoby obliczania całek metodą kwadratur	258
Obliczenia całek w Excelu	260
Wykorzystanie operacji tablicowych do skrócenia zapisu obliczeń	262
<i>Rozwiązanie ogólne</i>	262
<i>Rozwiązanie szczególne z zastosowaniem wybranej metody całkowania</i>	266
<i>Zastosowanie funkcji makr SZACUJ do obliczania wartości funkcji podcałkowej</i>	268
<i>Uzmiennienie granic całkowania</i>	270
Wykorzystanie iteracji i odwołań cyklicznych do obliczania całek	274
Obliczanie całek niewłaściwych	277
Przykład obliczenia całki metodą ekstrapolacji	277
<i>Obliczanie całki Arrheniusa</i>	278
Obliczanie górnej granicy całkowania	281
<i>Funkcja podcałkowa opisana wzorem</i>	281
Funkcja podcałkowa w postaci zbioru punktów pomiarowych	283

Rozdział 12. Obliczenia z wykorzystaniem szeregów potęgowych 289

Podstawowe pojęcia dotyczące ciągów i szeregów289

Obliczenia sum szeregów w Excelu291

*Całkowanie funkcji $EXP(x)/x$ z ręcznym określaniem liczby**sumowanych wyrazów szeregu 291**Zastosowanie formuł tablicowych 292**Automatyzacja procesu określania liczby sumowanych wyrazów szeregu 292**Alternatywny wzór na sumę szeregu 296**Sumowanie z wykorzystaniem obliczeń iteracyjnych 297**Suma szeregu zdefiniowanego rekurencyjnie 299**Problemy występujące przy obliczaniu szeregów 300**Obliczanie całki temperaturowej metodą sumowania szeregów 302***Rozdział 13. Równania różniczkowe zwyczajne 307**

Pojęcie równania różniczkowego307

Rozwiązywanie zagadnienia początkowego metodą Eulera308

Typowe równania kinetyki chemicznej 308

Modyfikacje metody Eulera316

*Idea rozwiązania 316**Implementacje rozwiązania w Excelu 317*

Metoda Rungego-Kutty320

*Opis metody 320**Implementacja rozwiązania w Excelu 321*

Porównanie dokładności metod całkowania równań różniczkowych323

Specjalne metody całkowania równań kinetycznych324

*Opis metody 324**Implementacja rozwiązania w Excelu 326**Inne metody całkowania równań kinetycznych 328*

Zagadnienie brzegowe równania różniczkowego zwyczajnego329

Metoda strzałów330

Metoda różnic skończonych333

Rozdział 14. Równania różniczkowe cząstkowe 337

Przykłady równań różniczkowych cząstkowych337

Równania eliptyczne338

Równania paraboliczne344

*Rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego 346**Schematy różnicowe 347*

Rozdział 15. Zagadnienia kombinatoryki	355
Ogólne prawa kombinatoryki	355
Liczba wariacji, permutacji i kombinacji	356
Wariacje z powtórzeniami	356
Wariacje bez powtórzeń	357
Permutacje	357
Nieporządki (przestawienia)	358
Permutacje z powtórzeniami	359
Kombinacje	360
Kombinacje z powtórzeniami	361
Problemy terminologiczne	362
Generowanie wyników kombinatorycznych	363
Lista wariacji z powtórzeniami	363
Lista wariacji bez powtórzeń	366
Lista permutacji	368
Ciąg permutacji z powtórzeniami	369
Generowanie kombinacji przez eliminację z listy wariacji	369
Bezpośrednie generowanie kombinacji	372
Generowanie kombinacji z powtórzeniami	377
Rozdział 16. Konwersja liczb i jednostek	379
Dostosowanie stylu wyświetlania liczb do lokalnych ustawień systemowych	379
Przyczyna problemu	379
Odróżnienie liczby od tekstu wyglądającego jak liczba	380
Konwersja stylu liczby za pomocą narzędzi dostępnych w arkuszu	381
Konwersja liczb w różnych systemach pozycyjnych	384
Konwersja jednostek miar	387
Konwersja jednostek złożonych	390
Zmiany i uzupełnienia wprowadzone w edycji 2013	390
Rozdział 17. Liczby i funkcje zespolone	395
Podstawowe wzory i definicje	396
Interpretacja geometryczna liczby zespolonej i jej postać trygonometryczna	397
Wzór Eulera i wykładnicza postać liczby zespolonej	398
Równość liczb zespolonych	398
Działania arytmetyczne na liczbach zespolonych	398
Potęgowanie i pierwiastkowanie	399
Funkcje elementarne z argumentem zespolonym	401
Funkcja wykładnicza i logarytm	401
Funkcja potęgowa	402
Funkcje trygonometryczne i hiperboliczne	403

Format wyświetlania liczb zespolonych	404
Zastosowanie liczb zespolonych w elektrotechnice	406
Rozdział 18. Operacje na danych oznaczających datę i czas	411
Wprowadzanie czasu	412
Wprowadzanie dat	414
Interpretacja tekstu jako daty	417
<i>Użycie funkcji do zmiany postaci daty</i>	417
Przegląd funkcji Excela do operacji na datach	418
<i>Funkcja DATA</i>	419
<i>Funkcja DATA.WARTOŚĆ</i>	420
<i>Funkcja DZIEŃ</i>	421
<i>Funkcja DNI</i>	421
<i>Funkcja DNI.360</i>	421
<i>Funkcja NR.SER.DATY</i>	422
<i>Funkcja NR.SER.OST.DN.MIES</i>	422
<i>Funkcja GODZINA</i>	423
<i>Funkcja MINUTA</i>	423
<i>Funkcja MIESIĄC</i>	423
<i>Funkcja DNI.ROBOCZE</i>	423
<i>Funkcja DNI.ROBOCZE.NIESTAND</i>	424
<i>Funkcja TERAZ</i>	425
<i>Funkcja SEKUNDA</i>	426
<i>Funkcja CZAS</i>	426
<i>Funkcja CZAS.WARTOŚĆ</i>	427
<i>Funkcja DZIŚ</i>	427
<i>Funkcja DZIEŃ.TYG</i>	427
<i>Funkcja NUM.TYG</i>	428
<i>Funkcja ISO.NUM.TYG</i>	429
<i>Funkcja DZIEŃ.ROBOCZY</i>	429
<i>Funkcja DZIEŃ.ROBOCZY.NIESTAND</i>	430
<i>Funkcja ROK</i>	431
<i>Funkcja CZĘŚĆ.ROKU</i>	431
Typowe operacje na danych oznaczających datę i czas	431
<i>Dodawanie określonych jednostek czasu do daty lub czasu albo ich odejmowanie</i>	431
<i>Konwersja pomiędzy długościami okresów czasu wyrażonymi w różnych jednostkach</i>	433
<i>Obliczanie różnicy między datami</i>	433
<i>Obliczanie daty początku następnego tygodnia</i>	434
<i>Najbliższy dzień roboczy</i>	435
<i>Obliczanie daty i godziny zakończenia czynności z uwzględnieniem dni roboczych i godzin pracy</i>	435

Wyświetlanie nazw miesięcy i dni tygodnia	436
Wyświetlanie numeru miesiąca i dnia tygodnia	436
Niestandardowy sposób zapisu czasu	437
Funkcja CENA.UŁAM	437
Funkcja CENA.DZIES	438
Konwersja czasu zapisanego jako godziny, minuty na godziny i ułamki dziesiętne godzin	439
Niestandardowe minuty w indeksie górnym	440
Rozdział 19. Operacje z udziałem tekstów	443
Kodowanie znaków w systemie Windows	443
Przegląd funkcji standardowych do operacji na tekstach	443
Funkcja KOD	444
Funkcja ZNAK	444
Funkcja OCZYŚĆ	444
Wprowadzanie i usuwanie znaku LF	445
Funkcja USUŃ.ZBĘDNE.ODSTĘPY	446
Funkcja DŁ	447
Funkcja PORÓWNAJ	447
Funkcja LEWY	448
Funkcja PRAWY	448
Funkcja FRAGMENT.TEKSTU	448
Funkcja ZNAJDŹ	450
Funkcja PODSTAW	451
Funkcja ZASTĄP	452
Funkcja SZUKAJ.TEKST	454
Funkcja POWT	456
Funkcja LITERY.MAŁE	456
Funkcja LITERY.WIELKIE	457
Funkcja Z.WIELKIEJ.LITERY	457
Funkcja WARTOŚĆ	457
Funkcja ZŁĄCZ.TEKSTY	458
Funkcja ZŁĄCZ.TEKST	459
Funkcja POŁĄCZ.TEKSTY	459
Funkcje KWOTA i ZAOKR.DO.TEKST	460
Funkcja TEKST	460
Funkcja T	460
Używanie znaków zastępczych	461
Wybrane operacje na danych tekstowych	462
Sprawdzanie, czy tekst zawiera określoną frazę	462
Zliczanie określonych znaków lub fraz w tekście	462

<i>Zliczanie słów w tekście</i>	463
<i>Podział tekstu na dwie części na granicy słów</i>	464
<i>Wybór pierwszego lub ostatniego słowa w tekście</i>	465
<i>Podział tekstu na słowa lub inne fragmenty na podstawie położenia separatorów</i>	465
<i>Wydzielenie liczby z tekstu</i>	466
<i>Oddzielenie cyfr od innych znaków w tekście</i>	467
<i>Wykonanie funkcji tekstowych w komórkach sformatowanych tekstowo</i>	468
<i>Ciągi cyfr z wiodącymi zerami</i>	468
Łączenie tekstów	470
<i>Wykorzystywanie obliczeń iteracyjnych</i>	470
<i>Przekształcanie zakresu w stałą tablicową, a następnie w tekst</i>	472
Rozdział 20. Użycie funkcji INDEKS z argumentami indeksowymi w postaci tablic	477
Ograniczenia w użyciu tablic, które są wynikami formuł	477
Specyfika użycia funkcji INDEKS z argumentami indeksowymi w postaci tablic	479
<i>Sposób 1.</i>	479
<i>Sposób 2.</i>	480
<i>Sposób 3.</i>	481
<i>Sposób 4.</i>	482
Przegląd problemów wynikających z używania wyrażeń indeksowych o różnej postaci	482
<i>Jedno z wyrażeń indeksowych jest tablicą, a drugie liczbą różną od zera</i>	483
<i>Oba wyrażenia indeksowe są tablicami bez elementów zerowych</i>	483
<i>Jedno z wyrażeń indeksowych jest zwykłą tablicą, a drugie SWI</i>	484
<i>Oba wyrażenia indeksowe są typu SWI bez zer</i>	485
<i>Jedno z wyrażeń indeksowych jest tablicą, a drugie zerem</i>	485
<i>Użycie zera jako wartości elementu wyrażenia indeksowego</i>	486
<i>Jedno z wyrażeń indeksowych jest tablicą zawierającą zero, a drugie zerem</i>	487
<i>Niedopasowanie wielkości wyrażeń indeksowych</i>	487
<i>Argument główny jest tablicą jednowymiarową,</i> <i>a wyrażenie indeksowe tablicą dwuwymiarową</i>	488
<i>Struktura tablicowa wyniku funkcji INDEKS</i>	488
<i>Funkcja INDEKS z argumentami tablicowymi skojarzona z funkcją</i> <i>agregującą lub tablicową</i>	488
<i>Pominięcie indeksu lub użycie zera jako jego wartości przy sumowaniu</i>	491
<i>Funkcja INDEKS z zakresami nieregularnymi</i>	493
Wybrane niestandardowe zastosowania funkcji INDEKS	498
<i>Łączenie fragmentów tablicy dwuwymiarowej</i>	498
<i>Zastosowania odwołaniowej formy funkcji INDEKS</i>	499
<i>Odwracanie porządku elementów w zakresie</i>	499

Wykorzystanie tablic bazowych do indeksowania tablic	500
<i>Odwracanie kolejności elementów w tablicach</i>	500
<i>Rozmieszczenie danych w tablicy o założonych rozmiarach</i>	501
<i>Sumowanie wyrazów w wydrebnionym fragmencie tablicy</i>	501
<i>Selektywne sumowanie elementów tablic dwuwymiarowych</i>	502
<i>Usuwanie wybranego wiersza lub wybranej kolumny z tablicy</i>	503
<i>Łączenie fragmentów zakresów i tablic w tablicę ciągłą</i>	503
Rozdział 21. Pseudozakresy	507
Pojęcie pseudozakresu	507
<i>Pseudozakresy jako wyniki funkcji ADR.POŚR</i>	509
<i>Pseudozakresy jako wyniki funkcji PRZESUNIĘCIE</i>	510
Pseudozakresy jako argumenty funkcji L(N) lub T	511
Pseudozakres jako drugi (lub kolejny) argument funkcji JEŻELI lub WYBIERZ	514
Pseudozakres jako pierwszy argument funkcji INDEKS	515
Pseudozakresy jako argumenty funkcji SUMY.CZĘŚCIOWE i AGREGUJ	518
Pseudozakresy jako argumenty funkcji SUMA.JEŻELI	520
Pseudozakresy jako argumenty funkcji agregujących	523
<i>Pseudozakresy I rodzaju</i>	523
<i>Pseudozakresy II rodzaju</i>	527
Pseudozakresy jako argumenty funkcji tablicowych	528
Pseudozakresy jako argumenty funkcji baz danych	530
Pseudozakresy jako argumenty funkcji KOMÓRKA	533
Użycie pseudozakresów z funkcją LOS	535
Pseudozakresy jako argumenty funkcji makr XLM	536
Szczególne przypadki użycia pseudozakresów	536
<i>Pseudozakres jako drugi argument funkcji INDEKS</i>	536
<i>Pseudozakres jako pierwszy argument funkcji PRZESUNIĘCIE</i>	537
<i>Indeksowanie funkcji PRZESUNIĘCIE z pseudozakresem</i>	538
<i>Użycie funkcji PRZESUNIĘCIE do danych przefiltrowanych funkcją INDEKS</i>	539
<i>Formuły tablicowe z pseudozakresami uwzględniające faktyczne rozmiary obszaru formuły</i>	542
<i>Operacje agregujące na zakresach dynamicznych</i>	546
<i>Równoległe tablice bazowe</i>	547
Rozdział 22. Ciekawostki i pomysły niewymagające użycia VBA	549
Wyznaczanie długości części wspólnej dwu odcinków	549
Suma cyfr liczby całkowitej	550
Budowanie liczby z cyfr	551

Obliczenia uwzględniające ukryte kolumny	552
<i>Z wierszem pomocniczym</i>	552
<i>Z formułą nazwaną (rozwiązanie egzotyczne)</i>	553
<i>Z formułą nazwaną (z użyciem pseudozakresu)</i>	554
Funkcja PROCENT.POZYCJA — specyfika i możliwości wykorzystania	554
<i>Zastosowania funkcji PROCENT.POZYCJA</i>	558
Funkcja PRAWDPD — specyfika i możliwości wykorzystania	560
Użycie funkcji generujących liczby pseudolosowe	562
Formuły „zatrzaskowe”	565
<i>Wykonanie jednorazowe</i>	565
<i>Wykonanie wielokrotne</i>	567
Cykliczna formuła warunkowa	568
Suma iloczynów według formuły narastającej	569
Wstawianie i usuwanie wierszy w zakresie sumowania	570
Obliczanie wartości wyrażeń danych w postaci tekstu	571
Operacje bitowe na danych liczbowych	573
Literatura cytowana i uzupełniająca	577
Skorowidz	579

Rozdział 7.

Regresja liniowa jednowymiarowa

Zakres zastosowania regresji liniowej

Eksperymenty, których rezultatem są duże zbiory danych liczbowych reprezentujących zależności pomiędzy zmiennymi wejściowymi a wynikami, staramy się zwykle opracować w postaci wykresów lub równań. Postać równań może wynikać z przesłanek teoretycznych, lecz najczęściej stosuje się do opisu typowe, stosunkowo proste równania funkcji liniowej, wielomianowej, potęgowej, wykładniczej lub logarytmicznej. Najczęściej stosowanym kryterium dopasowania równania do danych doświadczalnych jest **minimalna suma kwadratów** różnic między wartościami wynikowymi zmierzonymi a wyznaczonymi z równania. Kryterium to stanowi podstawę metody regresji, której szczególnym przypadkiem jest regresja liniowa.

Regresja liniowa nie ogranicza się do zależności liniowej między wynikami a danymi wejściowymi, lecz obejmuje wszystkie równania, które są liniowe ze względu na występujące w nich współczynniki. Jeżeli równanie opisujące wyniki eksperymentu przedstawimy w postaci $Y = f(X, A)$, gdzie Y reprezentuje wielkości wynikowe, X — zmienne wejściowe, a A — współczynniki, to równanie jest liniowe ze względu na współczynniki, jeśli pochodna $\partial Y / \partial A$ nie zależy od A . Do tej kategorii zaliczymy więc zarówno równania typu:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

w których wielkość wynikowa zależy od trzech niezależnych zmiennych wejściowych, jak i równania typu:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^{-1} + a_4 \ln x$$

gdzie zależność od jednej zmiennej wejściowej przedstawiona jest za pomocą równania nieliniowego ze względu na x , ale liniowego ze względu na współczynniki. Możliwe są też równania typu:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{12}x_1x_2 + a'_{12}x_1/x_2$$

reprezentujące zależność od dwóch zmiennych wejściowych.

Istnieje także kategoria równań, które wprawdzie nie są liniowe, ale dają się przekształcić do postaci liniowej przez odpowiednią zamianę zmiennych. Do tej grupy zaliczamy na przykład równanie wykładnicze:

$$y = ae^{bx}$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu przyjmie ono postać:

$$\ln y = \ln a + bx$$

która jest już liniowa ze względu na współczynniki. Pamiętać jednak należy, że zastosowanie metody regresji do tak przekształconego równania prowadzi do innych wartości współczynników, niż gdyby brać pod uwagę równanie w pierwotnej postaci. Czym innym jest suma kwadratów odchyleń liczona dla y , a czym innym ta suma liczona dla $\ln y$. W tym drugim przypadku relatywnie zmniejsza się waga punktów pomiarowych, w których wartości y były większe, a zwiększa się waga punktów z małymi wartościami y . Niemniej metodę linearyzacji równań stosuje się dość powszechnie, gdy tylko jest to możliwe.

Podobnie daje się linearyzować zależność potęgowa:

$$y = ax^b$$

Po obustronnym zlogarytmowaniu otrzymujemy:

$$\ln y = \ln a + b \ln x$$

czyli równanie liniowe, ale — podobnie jak poprzednio — nie dla y , lecz dla $\ln y$.

Kolejny typ równania podlegający linearyzacji to dwuparametrowa funkcja homograficzna:

$$y = \frac{ax}{x+b}$$

Po inwersji równanie przekształca się do postaci:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x}$$

która reprezentuje liniową formę zależności $1/y = f(1/x)$.

Inne możliwe sposoby linearyzacji tego równania to:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a}x, \quad y = a - b \frac{y}{x} \quad \text{lub} \quad xy = ax - by$$

Pierwszy reprezentuje liniową formę zależności $x/y = f(x)$, drugi $y = f(y/x)$, a trzeci $xy = f(x, y)$ bez wyrazu wolnego. Do każdej z tych zależności można dołączyć zależność odwrotną, która też jest liniowa.

Zastosowanie każdej z form linearyzacji prowadzi do innych wartości współczynników a i b .

Linearyzacji podlega również funkcja Gaussa, ważna w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej, ale także w obróbce danych doświadczalnych, gdyż wykresy otrzymywane w różnych technikach badawczych przyjmują często kształty zbliżone do krzywej Gaussa. Krzywą Gaussa można opisać równaniem z trzema parametrami, A , B i m :

$$y = Ae^{-B(x-m)^2}$$

Po zlogarytmowaniu otrzymamy zależność:

$$\ln y = \ln A - B(x - m)^2 = (\ln A - Bm^2) + 2Bmx - Bx^2$$

Jest to równanie kwadratowe ze względu na x . Można do niego zastosować regresję liniową wielowymiarową.

To najbardziej typowe przykłady linearyzacji. W podobny sposób linearyzuje się bardziej złożone funkcje, na przykład zależność potęgowo-wykładniczą:

$$y = ax^b e^{cx}$$

$$\text{lub } y = \frac{ax^n}{x+b}$$

pod warunkiem że n jest znaną stałą, a nie współczynnikiem do wyznaczenia.

Istnieje jednak wiele zależności ważnych z punktu widzenia obróbki danych doświadczalnych, które nie dają się linearyzować i wymagają nieco innego podejścia, zwanego regresją nieliniową. Przykłady takich zależności to:

$$y = a(1 - e^{-bx})$$

$$y = \frac{ax^{1/2}}{1 + bx^{1/2}} + cx$$

W tym rozdziale ograniczę się do omówienia przypadków regresji liniowej jednej zmiennej, które da się sprowadzić do najprostszej zależności:

$$y = a + bx$$

W następnym rozdziale omówione będą pozostałe przypadki regresji liniowej, a w kolejnym — regresja nieliniowa.

Ocena statystyczna danych pomiarowych i jakości dopasowania równania regresji

Charakterystyka zbiorów danych pomiarowych

Poszukując zależności między wielkościami Y i X , zgromadziliśmy dane pomiarowe w postaci zbioru N par wartości (x_i, y_i) . Zbiór ten można scharakteryzować za pomocą różnych wielkości zagregowanych, to znaczy obliczonych dla wszystkich punktów zbioru łącznie. Wielkości te mogą być obliczane osobno dla każdej zmiennej lub mogą obejmować obie zmienne równocześnie.

Dla każdej zmiennej można obliczyć wartość średnią (średnia arytmetyczna) według wzorów:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \qquad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

W tym tekście kreska nad symbolem oznacza wartość średnią. W Excelu służy do tego funkcja ŚREDNIA, która może przyjmować dowolną liczbę argumentów w postaci stałych, adresów komórek i zakresów oraz nazw odnoszących się do tych obiektów.

Do określenia liczby N można użyć funkcji ILE.LICZB, przydatnej przy dużej liczbie pomiarów i wtedy, gdy ich wyniki są rozmieszczone w kilku miejscach w arkuszu.

Jedną z miar rozproszenia danych jest ich odchylenie kwadratowe, czyli suma kwadratów odchyleń zmiennej od wartości średniej:

$$SS_x = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \qquad SS_y = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

W Excelu wielkość tę oblicza funkcja ODCH.KWADRATOWE.

Ponieważ odchylenie kwadratowe rośnie ze wzrostem liczby punktów, to aby można było porównywać różne zbiory danych, często się je standaryzuje, dzieląc przez liczbę danych. Otrzymuje się wielkość zwaną **wariancją**, która funkcjonuje w dwóch postaciach — **wariancji próbkowej**, gdy w mianowniku jest $N-1$, i **wariancji populacyjnej**, gdy w mianowniku jest N :

$$S_{xpr} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1} \qquad S_{ypr} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}$$

$$S_{xpop} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N} \qquad S_{ypop} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N}$$

W Excelu obliczenia te wykonują funkcje WARIANCJA i WARIANCJA.POPUL. Poczawszy od Excela 2010, zaleca się używanie nowych nazw: WARIANCJA.PRÓBK I WARIANCJA.POP, jakkolwiek stare nazwy nadal mogą być stosowane.

Pierwiastek z wariancji ma ten sam wymiar co wielkość mierzona i może być miarą odchylenia wartości zmierzonej w punkcie od średniej. Analogicznie do wariancji stosowane są dwie wielkości — **odchylenie standardowe próbk**i, gdy w mianowniku jest $N-1$, i **odchylenie standardowe populacji**, gdy w mianowniku jest N :

$$s_{xpr} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad s_{ypr} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N-1}}$$

$$s_{xpop} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad s_{ypop} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N}}$$

W Excelu używa się funkcji ODCH.STANDARDOWE i ODCH.STANDARD.POPUL. Poczawszy od Excela 2010, zaleca się stosowanie nowych nazw: ODCH.STANDARD.PRÓBK I ODCH.STAND.POPUL, jakkolwiek stare nazwy nadal mogą być używane.

Rzadziej stosowaną miarą odchylenia zbioru danych od wartości średniej jest **odchylenie średnie**, liczone na podstawie sumy wartości bezwzględnych odchyłeń:

$$SS'_x = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N}$$

W Excelu obliczenia te wykonuje funkcja ODCH.ŚREDNIE.

Ocena zależności między zbiorami danych pomiarowych

Kowariancja

Omówione powyżej wielkości charakteryzują oddzielnie zbiory wartości x i y . Aby ocenić zależność między tymi wielkościami, należy powiązać ich wartości we wspólnym agregacie. Pierwszą z takich wielkości jest **kowariancja**, występująca — podobnie jak wariancja — w dwóch odmianach: **kowariancji z próbki** i **kowariancji populacji**. Znając definicję wariancji, łatwo się domyślić, jak jest zbudowana ta funkcja:

$$s_{xyp} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N-1}$$

$$S_{xypop} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}$$

Kowariancja służy do oceny, czy pomiędzy zmiennymi x i y istnieje zależność liniowa. Jeżeli zmienne są niezależne, kowariancja jest bliska zeru. Wariancje i kowariancję można wyrazić równoważnie także w inny sposób:

$$S_{xpop} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \quad S_{ypop} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - \bar{y}^2 \quad S_{xypop} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Stosując konsekwentnie oznaczenie średniej arytmetycznej w postaci kreski nad symbolem, można te wzory zapisać jeszcze prościej:

$$S_{xpop} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad S_{ypop} = \overline{y^2} - \bar{y}^2 \quad S_{xypop} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Należy pamiętać, że średnia wartość iloczynów to nie to samo co iloczyn średnich. W starszych wersjach Excela kowariancję obliczymy za pomocą funkcji KOWARIANCJA. Oblicza ona kowariancję populacji. Począwszy od Excela 2010, dostępne są dwie funkcje, KOWARIANCJA.PRÓBK I KOWARIANCJA.POPUL, ale można też używać starych nazw funkcji w dotychczasowym znaczeniu.

Współczynnik korelacji

Do oceny zależności liniowej między zmiennymi x i y wykorzystuje się często kowariancję znormalizowaną poprzez podzielenie jej przez iloczyn odchyłeń standardowych. Współczynnik ten nosi nazwę **współczynnika korelacji Pearsona**, zwany jest często krótko współczynnikiem korelacji R .

$$R = \frac{S_{xypop}}{S_{xpop} S_{ypop}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Współczynnik ten może przyjmować wartości z przedziału $[-1, +1]$. Wartości skrajne odpowiadają doskonałej korelacji liniowej, odpowiednio malejącej lub rosnącej.

W Excelu współczynnik korelacji oblicza się za pomocą funkcji WSP.KORELACJI lub PEARSON.

Równie często, a może nawet częściej, zamiast współczynnika korelacji oblicza się jego kwadrat. W Excelu służy do tego funkcja R.KWADRAT.

Zasady doboru współczynników w równaniu regresji

Jeżeli chcemy opisać zależność pomiędzy zmiennymi y i x w sposób sformalizowany, czyli w postaci równania ze współczynnikami liczbowymi (**równania regresji**), musimy określić kryterium doboru wartości tych współczynników. Jak już wspominałem, kryterium jakości dopasowania równania regresji do danych pomiarowych stanowi najczęściej minimalna wartość sumy kwadratów różnic między wartościami y zmierzonymi a wartościami $\hat{y}$ obliczonymi z równania regresji. Tę sumę określa się najczęściej nazwą **sumy resztkowej** i oznacza symbolem SS_{resz} :

$$SS_{resz} = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

N oznacza tu liczbę danych odnoszących się do zmiennej y .

Do oceny jakości dopasowania niezbędna jest też tzw. **liczba stopni swobody**, $f = N - l$, czyli różnica między liczbą pomiarów N a liczbą współczynników l , które trzeba wyznaczyć. Jeżeli dysponujemy tylko tyloma wynikami pomiarów, ile współczynników jest do wyznaczenia, liczba stopni swobody $f = 0$, wtedy również $SS_{resz} = 0$, ale nie ma możliwości statystycznej oceny jakości otrzymanego równania. Na przykład przez dwa punkty zawsze można przeprowadzić prostą, ale gdyby dodać trzeci punkt pomiarowy, to nie wiadomo, czy też leżałby na tej prostej. Miarą jakości dopasowania równania jest stosunek sumy resztkowej SS_{resz} do liczby stopni swobody f , zwany **wariancją resztkową**.

Pierwiastek z wariancji resztkowej zwany jest **średnim błędem oszacowania wartości y** , s_y . To kolejna charakterystyka statystyczna równania regresji. Wartość tę umieszcza się czasem na wykresach w postaci słupków błędu wartości y . Jest ona obliczana ze wzoru:

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_{resz}}{N - l}} = \sqrt{\frac{SS_{resz}}{f}}$$

Każdy z wyznaczonych współczynników w równaniu regresji obarczony jest pewnym błędem, który również można oszacować. Im większa jest wartość współczynnika (liczona jako wartość bezwzględna) w stosunku do błędu jego oszacowania, tym bardziej istotny jest dany współczynnik. Współczynniki mało istotne, tzn. takie, których błąd jest relatywnie duży, powinny być usuwane z równania regresji. Pomocne jest tu **kryterium statystyczne t Studenta**, które określa graniczną wartość tego stosunku, zależną od liczby stopni swobody powtarzalności pomiarów oraz od przyjętego tzw. poziomu istotności.

Suma resztkowa i wariancja resztkowa nie wystarczają jednak do pełnej charakterystyki danych pomiarowych, bo jeżeli wartości y zmieniają się wyraźnie od punktu do punktu (zależność jest stroma), to i suma resztkowa będzie stosunkowo duża. Jeżeli natomiast zmienność y jest niewielka (zależność jest płaska), to i suma resztkowa będzie mała, chociaż równanie niekoniecznie musi być dobrze dobrane. Dlatego sensownie jest porównać sumę resztkową z sumą kwadratów odchyłeń wyników w punktach pomiarowych odniesionych do ogólnej średniej z wszystkich

wyników pomiarów. Tę ogólną sumę kwadratów wokół średniej pomniejszoną o sumę reszkową nazwano **sumą regresyjną**. Oblicza się ją ze wzoru:

$$SS_{regr} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 - SS_{resz} = SS_y - SS_{resz}$$

W Excelu (od edycji 2003) zależność tę stosuje się tylko do pełnego równania regresji (gdy wyraz wolny jest obliczany). Kiedy wyraz wolny jest równy zero, stosowany jest zmodyfikowany wzór (kwestię tę wyjaśniam dokładnie dalej). Sumy kwadratów reszkowa i regresyjna są porównywane w dwojaki sposób. Na ich podstawie oblicza się tzw. **współczynnik determinacji D**:

$$D = \frac{SS_{regr}}{SS_{regr} + SS_{resz}} = 1 - \frac{SS_{resz}}{SS_y}$$

Wielkość ta jest bardzo często wykorzystywana do oceny jakości równania regresji. Jeżeli dane nie są obciążone dużymi błędami pomiarów, a równanie regresji zostało dobrze dobrane, jej wartość jest bardzo bliska 1. Wartości poniżej 0,9 świadczą już o stosunkowo mało dokładnym równaniu. Nie jest to jednak całkiem jednoznaczne — w pomiarach fizycznych (szerzej w naukach ścisłych) współczynniki determinacji przyjmują zwykle wartości dużo bliższe 1 niż na przykład w naukach medycznych, rolniczych czy ekonomicznych.

Inną charakterystyką statystyczną wyliczaną na podstawie powyższych sum kwadratów jest stosunek *F* wariancji regresji do wariancji reszkowej. Jest to wielkość, którą porównuje się z **kryterium statystycznym Fishera-Snedecora**:

$$F = \frac{SS_{regr} / (l - 1)}{SS_{resz} / f} \quad \text{lub} \quad F = \frac{SS'_{regr} / l}{SS_{resz} / f}$$

Pierwszy wariant wzoru stosuje się, gdy stała w równaniu regresji jest obliczana, a drugi — gdy stała jest równa zero. Jednak w tym drugim przypadku suma regresyjna obliczana jest ze zmodyfikowanego wzoru (zobacz dalej). Wartość *F* powinna być możliwie jak największa, a w każdym razie większa od wartości granicznej, określonej w zależności od liczby stopni swobody licznika i mianownika oraz przyjętego poziomu istotności.

Regresja liniowa w Excelu

Znaczenie współczynników w równaniu regresji i sposoby ich obliczania

W arkuszu kalkulacyjnym dostępnych jest kilka funkcji, które służą do wyznaczania równań regresji. Ponadto dostępne są narzędzia do analizy regresji powiązane z kreatorem wykresów (linia trendu) oraz niezależne, wchodzące w skład dodatku *Analysis Toolpak*, których nie będę tu omawiał.

Najprostszy przypadek dotyczy dopasowania funkcji liniowej jednej zmiennej. Jeśli poszukiwana zależność da się opisać równaniem:

$$y = ax + b$$

to zastosowanie metody najmniejszej sumy kwadratów (określanej dalej skrótowo jako NK) prowadzi do następujących wzorów na współczynniki a i b :

$$a = \frac{S_{xy\text{pop}}}{S_{x\text{pop}}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = \frac{\bar{y} \cdot \overline{x^2} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$R^2 = \frac{S_{xy\text{pop}}^2}{S_{x\text{pop}} S_{y\text{pop}}} = \frac{(\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y})^2}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)} = a^2 \frac{\overline{x^2} - \bar{x}^2}{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = a^2 \frac{S_{x\text{pop}}}{S_{y\text{pop}}}$$

$$SS_{\text{reszt}} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right)^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = (1 - R^2) \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 - a^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_{\text{reszt}}}{N-2}} = \sqrt{\frac{SS_{\text{reszt}}}{f}}$$

Funkcje NACHYLENIE, ODCIĘTA, R.KWADRAT i REGBŁSTD

W Excelu można wykorzystać cztery funkcje o podobnej składni, które umożliwiają obliczenie współczynników a i b , współczynnika determinacji D , który w tym przypadku jest równy kwadratowi współczynnika korelacji R^2 , oraz standardowego błędu oceny wartości y_{s_y} . Są to funkcje:

NACHYLENIE(**znane_y**; **znane_x**) — oblicza współczynnik a

ODCIĘTA(**znane_y**; **znane_x**) — oblicza współczynnik b

R.KWADRAT(**znane_y**; **znane_x**) — oblicza współczynnik R^2

REGBŁSTD(**znane_y**; **znane_x**) — oblicza oszacowanie błędu s_y

Znane_y i **znane_x** to tablice lub zakresy komórek o identycznych rozmiarach zawierające dane liczbowe. Jeżeli zakresy lub tablice zawierają dane nieliczbowe lub puste komórki, te wartości są ignorowane (jeśli jedna z wartości x lub y jest nieprawidłowa, ignorowana jest cała para). Jeżeli rozmiary tablic lub zakresów są różne, otrzymujemy komunikat błędu #N/D!. Orientacja **znane_y**

i **znane_x** jest obojętna, ale zakresy muszą być spójne. Kolejność punktów **znane_y** i **znane_x** ustala się, odczytując te tablice lub zakresy wierszami. **znane_x** nie musi być uporządkowane. Zakresy lub tablice **znane_y** i **znane_x** muszą zawierać przynajmniej dwa różne punkty.

Pomiędzy funkcjami wymienionymi wcześniej istnieją zależności:

$$\begin{aligned} \text{NACHYLENIE}(\text{znane_y}; \text{znane_x}) &= \text{KOWARIANCJA}(\text{znane_y}; \text{znane_x}) / \text{WARIANCJA.POPUL}(\text{znane_x}) \\ \text{ODCIĘTA}(\text{znane_y}; \text{znane_x}) &= \text{ŚREDNIA}(\text{znane_y}) - \text{ŚREDNIA}(\text{znane_x}) * \text{NACHYLENIE}(\text{znane_y}; \text{znane_x}) \\ \text{R.KWADRAT}(\text{znane_y}; \text{znane_x}) &= \text{NACHYLENIE}(\text{znane_y}; \text{znane_x}) * \text{NACHYLENIE}(\text{znane_x}; \text{znane_y}) \end{aligned}$$

Zależności te są spełnione pod warunkiem, że wszystkie dane są poprawne, to znaczy zakresy **znane_y** i **znane_x** mają takie same rozmiary i zawierają wyłącznie liczby.

Funkcja REGLINP

Jeśli w równaniu regresji występuje więcej wyrazów, a zarazem więcej współczynników, albo jeśli wyraz wolny (odcięta) jest równy zero, albo jeśli potrzebny jest pełniejszy statystyczny opis zbioru danych — należy skorzystać z funkcji tablicowej:

REGLINP(**znane_y**; **znane_x**; **czy_stała**; **czy_stat**)

znane_y i **znane_x**, jak poprzednio, reprezentują zbiory danych pomiarowych zmiennych *y* i *x*, ale teraz obszary te nie muszą mieć identycznych rozmiarów, jednak muszą być dopasowane. Jeżeli tablica **znane_y** jest pojedynczą kolumną, każda kolumna zbioru **znane_x** jest interpretowana jako oddzielna zmienna. Analogicznie jeżeli tablica **znane_y** jest pojedynczym wierszem, każdy wiersz zbioru **znane_x** jest interpretowany jako oddzielna zmienna.

Tablica **znane_x** może zawierać jeden lub więcej zbiorów zmiennych. Jeżeli używana jest tylko jedna zmienna, **znane_y** i **znane_x** mogą być obszarami lub tablicami o dowolnym kształcie, ale o jednakowych wymiarach.

Jeżeli stosuje się więcej niż jedną zmienną *x*, **znane_y** musi być wektorem (tzn. zakresem lub tablicą o wysokości jednego wiersza bądź o szerokości jednej kolumny). Tablice **znane_y** i **znane_x** muszą być w całości wypełnione danymi liczbowymi (**nie mogą zawierać pustych komórek ani danych nieliczbowych** — inaczej niż w przypadku funkcji **NACHYLENIE**, **ODCIĘTA**, **R.KWADRAT** i **REGBŁSTD**), ponadto jeśli **znane_x** reprezentuje kilka zmiennych, musi stanowić **zakres spójny**, czyli musi być zawarte w jednym obszarze lub jednej tablicy.

Jeżeli pominie się **znane_x**, argument ten jest przyjmowany jako tablica {1;2;3;...} lub {1\2\3\...}, która ma taką samą wielkość jak **znane_y**.

Funkcja toleruje sytuację, w której liczba punktów jest zbyt mała do jednoznacznego wyznaczenia współczynników regresji. Przyjmuje wówczas zerowe współczynniki dla zmiennych, dla których nie jest możliwe wyznaczenie jednoznacznego wyniku.

Czy_stała jest to wartość logiczna określająca, czy stała *b* ma być równa 0, czy obliczana normalnie. Jeżeli **czy_stała** ma wartość **PRAWDA** lub jest pominięta, *b* jest obliczane normalnie. Jeżeli **czy_stała** ma wartość **FAŁSZ**, *b* jest równe 0, a wartości *a* są dopasowywane do równania $y = ax$ lub $y = \sum a_i x_i$.



Przy dodawaniu linii trendu do wykresu punktowego można zadeklarować dowolną wartość stałej b w równaniu regresji. W przypadku funkcji `REGLINP` można jedynie zadeklarować wartość 0. Jeżeli znana wartość stałej b jest różna od zera, należy od zmierzonych wartości y odjąć b i w charakterze zmiennej `znane_y` użyć tej różnicy, nadając równocześnie argumentowi `czy_stat` wartość `FAŁSZ`.

Jeżeli linia regresji ma przechodzić przez punkt stały o współrzędnych (x_0, y_0) , należy postąpić analogicznie, to znaczy wywołanie funkcji powinno mieć postać:

```
REGLINP(znane_y - y0; znane_x - x0; FAŁSZ; czy_stat)
```

a równanie linii regresji:

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0).$$

`Czy_stat` jest to wartość logiczna określająca, czy ma być dodatkowo obliczana statystyka regresji. Jeżeli `czy_stat` ma wartość `PRAWDA`, funkcja `REGLINP` daje w wyniku dodatkowe statystyki regresji, tak że uzyskiwana tablica ma postać $\{a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0 \setminus s_{an}; s_{an-1}; \dots; s_{a1}; s_{a0} \setminus D; s_y \setminus F; f \setminus SS_{reg}; SS_{resz}\}$ (separatory w konwencji Excela 2007–). Wynik składa się z pięciu wierszy i tylu kolumn, ile współczynników jest obliczanych. W pierwszym wierszu jest lista współczynników, ale w **kolejności odwrotnej** w stosunku do kolejności kolumn z danymi, zakończona wyrazem wolnym a_0 . W drugim wierszu są średnie błędy współczynników z pierwszego wiersza. Od trzeciego do piątego wiersza tylko po dwie wartości — kolejno: współczynnik determinacji D , średni błąd oszacowania wartości y , statystyka Fishera-Snedecora F , obok liczba stopni swobody wariancji resztkowej f i wreszcie w piątym wierszu suma regresyjna SS_{reg} i suma resztkowa SS_{resz} . Znaczenie tych wielkości i sposób ich obliczania podałem wcześniej, w punkcie „Zasady doboru współczynników w równaniu regresji”. Jeżeli `czy_stat` ma wartość `FAŁSZ` lub jest pominięty, funkcja `REGLINP` daje w wyniku tylko współczynniki $\{a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0\}$. Wyniki mieszczą się w jednym wierszu.

Funkcja `REGLINP` jest funkcją tablicową, więc wymaga wcześniejszego zaznaczenia miejsca na wynik i zatwierdzenia klawiszami `Ctrl+Shift+Enter`. Chociaż funkcja w swojej pełnej wersji może wyświetlać wyniki w pięciu wierszach, nie jest konieczne wyświetlanie ich wszystkich. Można na przykład zaznaczyć miejsce na wyświetlenie tylko trzech pierwszych wierszy, a zrezygnować z dwu ostatnich.

W przypadku równania z jedną zmienną współczynnik nachylenia i odciętą można odczytać z formuł:

Nachylenie a : = `INDEKS(REGLINP(znane_y;znane_x); 1)`

Punkt przecięcia z osią y b : = `INDEKS(REGLINP(znane_y;znane_x); 2)`

Relacja między współczynnikiem determinacji a kwadratem współczynnika korelacji

Należy zwrócić uwagę, że relacja:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

jest spełniona tylko wtedy, gdy wartości funkcji $\hat{y}$ są wyznaczone z pełnego równania prostej z wyrazem wolnym, a współczynniki są obliczane zgodnie z zasadą NK.

Człony tego wzoru są interpretowane kolejno jako: całkowite zróżnicowanie zmiennej y , zróżnicowanie zmiennej y objaśnione modelem i zróżnicowanie zmiennej y nieobjaśnione modelem.

W oparciu o ten wzór określa się współczynnik determinacji D jako stosunek sum:

$$D = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SS_{resz}}{SS_y}$$

Po spełnieniu warunków, o których była mowa wyżej, prawdziwa jest także równość:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

Uwzględniając wartości współczynników a i b obliczone metodą NK, otrzymujemy:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (ax_i + b - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (ax_i - a\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} = a^2 \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} = R^2$$

Zatem w tym przypadku współczynnik determinacji jest równy kwadratowi współczynnika korelacji.

Należy zauważyć, że według podanej definicji wartość **współczynnika determinacji zależy** od przyjętego **równania modelowego** opisującego dane, natomiast wartość **współczynnika korelacji zależy** tylko od samych **danych**.

Współczynnik korelacji między zmienną y a funkcją liniową x

Załóżmy, że mamy zbiór par wartości (x, y) . Dla tego zbioru możemy określić współczynnik korelacji pomiędzy wartościami x i y . Możemy obliczyć go za pomocą funkcji WSP.KORELACJI, a jego kwadrat za pomocą funkcji R.KWADRAT. Przekształcimy teraz wartości x w wartości $\hat{y}$, korzystając z dowolnej funkcji liniowej:

$$\hat{y} = ax + b$$

Obliczymy współczynnik korelacji między wartościami y i $\hat{y}$:

$$R(y, \hat{y}) = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Mamy:

$$\hat{y}_i = ax_i + b \quad \text{i} \quad \bar{\hat{y}} = a\bar{x} + b$$

Zatem:

$$\hat{y}_i - \bar{\hat{y}} = (ax_i + b) - (a\bar{x} + b) = a(x_i - \bar{x})$$

Po podstawieniu otrzymamy:

$$R(y, \hat{y}) = \frac{a \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{a^2 \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} = \text{sgn}(a) R(x, y)$$

Widzimy zatem, że współczynnik korelacji dowolnej funkcji liniowej zmiennej x ze zmienną y jest taki sam jak współczynnik korelacji samych zmiennych x i y z dokładnością do znaku a . Kwadraty współczynników korelacji są równe. Zależność ta obowiązuje dla dowolnych a i b , a nie tylko tych wyznaczonych metodą NK.

Równanie ze znanym wyrazem wolnym lub bez niego

Przypadkiem szczególnym jest model liniowy ze stałym współczynnikiem b (prosta przechodzi przez punkt stały) — wtedy zastosowanie metody NK prowadzi do poniższego wzoru na współczynnik kierunkowy a_N :

$$a_N = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - b \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i (y_i - b)}{\sum_{i=1}^N x_i^2} = \frac{\overline{xy} - b\bar{x}}{\overline{x^2}}$$

Model procesu może nie zawierać w ogóle wyrazu wolnego, czyli $b = 0$, a prosta wówczas przechodzi przez początek układu współrzędnych. W tym przypadku wzór upraszcza się do:

$$a_N = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$

Jeżeli rozpatrujemy pełne równanie prostej $y = ax + b$, to zgodnie z logiką narzucenie warunku $b = 0$ powoduje na ogół pogorszenie jakości dopasowania równania regresji do danych i w związku z tym należy oczekiwać niższych (w każdym razie nie wyższych) wartości współczynnika determinacji D . W pewnych przypadkach można otrzymać nawet wartości ujemne. Dotyczy to zwykle sytuacji, gdy dane są nieskorelowane lub słabo skorelowane, tzn. współczynnik korelacji R jest równy 0 lub bliski zeru. Równocześnie współczynnik korelacji i jego kwadrat zachowują tę samą wartość (zależą tylko od danych, a nie od postaci równania). W każdym razie jeśli narzucimy wartość któregośkolwiek współczynnika lub dobierzemy współczynniki według algorytmu innego niż metoda NK, zamiast relacji $D = R^2$ mamy $D < R^2$.

Niescentrowany współczynnik determinacji

Aby uniknąć ujemnych wartości współczynnika D , w przypadku równania **bez wyrazu wolnego** zaproponowano użycie zmodyfikowanego współczynnika, zwanego w literaturze **niescentrowanym współczynnikiem determinacji** D_N :

$$D_N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2}$$

Wzór ten wynika z relacji:

$$\sum_{i=1}^N y_i^2 = \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2 + \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Jest ona spełniona tylko wtedy, gdy wartości funkcji $\hat{y}$ są wyznaczone z równania prostej bez wyrazu wolnego, a współczynnik a_N jest obliczany zgodnie z zasadą NK.

Wzór opisujący D_N można uogólnić na przypadek dowolnej (lecz ustalonej) wartości wyrazu wolnego b :

$$D_N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - b)^2}$$

Jeżeli wzór ten zastosujemy do modelu liniowego z ustaloną wartością wyrazu wolnego b i ze współczynnikiem a_N określonym według metody NK, otrzymamy:

$$D_N = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i (y_i - b) \right)^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N (y_i - b)^2} = \frac{(\overline{xy} - b\bar{x})^2}{x^2 \cdot (y^2 - 2b\bar{y} + b^2)}$$

W szczególnym przypadku, gdy $b = 0$, mamy:

$$D_N = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i^2} = \frac{(\overline{xy})^2}{\overline{x^2} \cdot \overline{y^2}}$$

Z powyższych zależności widać, że tak zdefiniowany współczynnik będzie przyjmował wartości z przedziału $[0, 1]$. Należy jednak zauważyć, że w przypadku arbitralnego równania modelowego współczynnik D_N również może przyjmować wartości ujemne.

Związek między niescentrowanym a tradycyjnym współczynnikiem determinacji

Związek między niescentrowanym (przy $b = 0$) a tradycyjnym współczynnikiem determinacji można określić, porównując wzory:

$$D = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SS_{resz}}{SS_y} \quad \text{ i } \quad D_N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2} = 1 - \frac{SS_{resz}}{SS'_y}$$

Sumę z mianownika pierwszego wzoru można zapisać jako:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2 - N\bar{y}^2 \quad \text{ czyli } \quad SS_y = SS'_y - N\bar{y}^2$$

Z porównania wzorów wynika zależność:

$$\frac{1}{1-D} = \frac{1}{1-D_N} - \frac{N\bar{y}^2}{SS_{resz}}$$

Niescentrowany współczynnik korelacji

Można zdefiniować wielkość zwaną **niescentrowanym współczynnikiem korelacji** R_N według wzoru:

$$R_N = \frac{\overline{xy}}{\sqrt{\overline{x^2} \cdot \overline{y^2}}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i)^2 \sum_{i=1}^N (y_i)^2}}$$

Postać wzoru jest analogiczna do wzoru definiującego współczynnik korelacji R , lecz jego sens jest inny. Podobnie jak w przypadku R wartość tego współczynnika mieści się w przedziale $[-1, +1]$. Wartości skrajne odpowiadają doskonałej zależności proporcjonalnej, odpowiednio ze współczynnikiem ujemnym lub dodatnim. Jeżeli wyraz wolny nie jest równy zeru, należałoby zastosować wzór:

$$R_N = \frac{\sum_{i=1}^N x_i (y_i - b)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N (y_i - b)^2}} = \frac{\overline{xy} - b\bar{x}}{\sqrt{\overline{x^2} \cdot \sqrt{y^2 - 2b\bar{y} + b^2}}}$$

Definicja współczynnika R_N zależy od wartości b , czyli od postaci równania regresji. Jeżeli współczynnik proporcjonalności a_N jest wyznaczony według metody NK, spełniona jest zależność $D_N = R_N^2$.

Równanie ze znanym współczynnikiem kierunkowym

Analogicznie gdyby w modelu liniowym wartość współczynnika a była ustalona, wartość współczynnika b_M wyznaczona metodą NK wyniosłaby:

$$b_M = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)}{N} = \bar{y} - a\bar{x}$$

W takim przypadku obowiązuje relacja:

$$\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2 = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - ax_i)^2 + \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Na jej podstawie można zdefiniować jeszcze inny zmodyfikowany współczynnik determinacji D_M , specyficzny dla tej postaci równania:

$$D_M = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2}$$

Po podstawieniu wartości współczynnika b_M obliczonej metodą NK otrzymujemy:

$$D_M = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - ax_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (ax_i + b_N - ax_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^N b_N^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2} = \frac{(\bar{y} - a\bar{x})^2}{(y - ax)^2} = R_M^2$$

Zmodyfikowany współczynnik korelacji R_M , który mógłby mieć zastosowanie w tym przypadku, wyraża się wzorem:

$$R_M = \frac{\bar{y} - a\bar{x}}{\sqrt{(y - ax)^2}}$$

Ten przypadek nie został uwzględniony w Excelu; przytaczam go, aby zwrócić uwagę, że do różnych postaci równania regresji można dopasować odpowiednio zmodyfikowane definicje współczynników korelacji i determinacji, jednakże nie ma pomiędzy nimi prostych zależności, które umożliwiałyby porównania.

Pomiędzy współczynnikami można zapisać relacje:

$$\frac{D}{a^2} = \frac{\overline{x^2} - \bar{x}^2}{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \frac{\overline{(x - \bar{x})^2}}{\overline{(y - \bar{y})^2}}, \quad \frac{D_N}{a_N^2} = \frac{\overline{x^2}}{\overline{(y - b)^2}} \quad \text{oraz} \quad \frac{D_M}{a^2} = \frac{(\bar{y} / a - \bar{x})^2}{\overline{(y - ax)^2}}$$

Specyfika działania funkcji REGLINP przy braku wyrazu wolnego

W opisie działania funkcji REGLINP podano, że gdy wyraz wolny ma być równy **zeru**, zamiast współczynnika determinacji $D = R^2$ oblicza się **niescentrowany** współczynnik determinacji $D_N = R_N^2$. Do obliczania wartości F i R^2 zamiast sumy regresyjnej liczonej według wzoru:

$$SS_{regr} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 - SS_{resz} = SS_y - SS_{resz}$$

wykorzystuje się wielkość:

$$SS'_{regr} = \sum_{i=1}^N y_i^2 - SS_{resz} = SS'_y - SS_{resz}$$

Dotyczy to wersji 2003+. W wersji 2000 zawsze liczony jest tradycyjny współczynnik determinacji.

Przyjęcie takiego rozwiązania jest co najmniej dyskusyjne, gdyż prowadzi do różnych niekonsekwencji, o których mowa poniżej. Ponadto rozwiązanie to jest niezgodne z przyjętym w kreatorze wykresów. Gdy na wykresie, do którego dodano linię trendu, zażądamy wyświetlenia R^2 , otrzymujemy w istocie wartości współczynnika determinacji D obliczone ze wzoru:

$$D = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

niezależnie od tego, czy wartość stałej b jest obliczana czy ustalona. Wartości D czasem bywają ujemne, ale nie powinno to stwarzać problemów interpretacyjnych, poza tym, że niefortunnie określono ten współczynnik mianem R^2 . Należy pamiętać, że na wykresie można zażądać dowolnej wartości współczynnika b , a nie tylko wartości zerowej, jak w przypadku funkcji REGLINP. Co wtedy należałoby wyświetlić jako D ? Gdyby chcieć utrzymać konwencję przyjętą w funkcji REGLINP, należałoby użyć podanej wcześniej uogólnionej definicji niescentrowanego współczynnika determinacji:

$$D_N = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - b)^2}$$

W wersji 2000 funkcja REGLINP daje taką samą wartość współczynnika determinacji jak kreator wykresu, do którego dodano linię trendu.

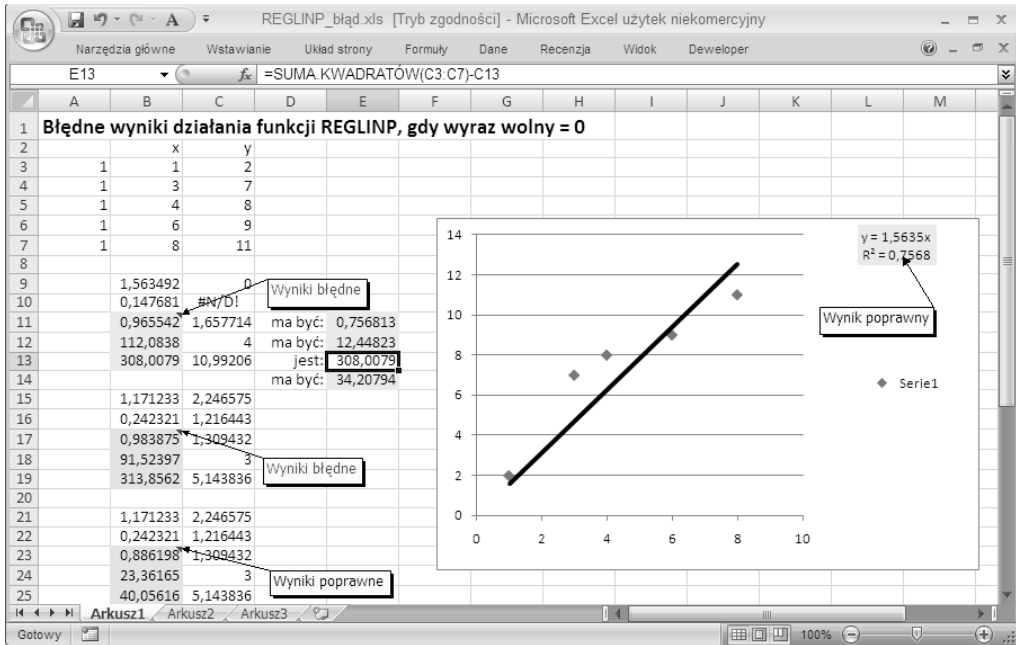
Na rysunku 7.1 pokazano, na czym polega (od wersji 2003) problem z funkcją REGLINP. Obliczenia przy użyciu tej funkcji wykonano trzykrotnie. Raz jako **znane_x** użyto jednej kolumny danych, z argumentem *czy_stala* o wartości FAŁSZ — wówczas funkcja zwraca (moim zdaniem niesłusznie) niescentrowany współczynnik determinacji, natomiast na wykresie współczynnik determinacji obliczony jest poprawnie. W drugim przypadku dodano drugą kolumnę x złożoną z samych jedynek i obliczono dwa współczynniki nadal z argumentem *czy_stala* o wartości FAŁSZ — tu również uzyskano niescentrowany współczynnik determinacji. W trzecim przypadku użyto jednej kolumny danych jako **znane_x**, z argumentem *czy_stala* o wartości PRAWDA — i uzyskano klasyczny współczynnik determinacji (poprawnie). Obliczone współczynniki równania prostej w drugim i trzecim przypadku są liczbowo równe, gdyż dotyczą faktycznie tych samych danych, różnica polega tylko na innym sposobie obliczania wskaźników statystycznych.

Reasumując, uważam, że sposób wyliczenia współczynnika determinacji zastosowany w kreatorze wykresów jest bardziej poprawny i spójny logicznie, a podejście zastosowane w funkcji REGLINP od wersji 2003 jest niekonsekwentne, prowadzi bowiem do niejednoznaczności i niezbyt logicznych wniosków dotyczących jakości dopasowania wzoru.

Nietypowe zastosowania funkcji REGLINP

Rozwiązanie układu równań liniowych

Kwestii rozwiązywania układów równań liniowych poświęciłem początek poprzedniego rozdziału. Przedstawiłem tam typowe sposoby rozwiązywania tego zagadnienia: wykorzystanie rachunku macierzowego lub dodatku *Solver*. W matematyce znane są również inne sposoby osiągnięcia tego celu, takie jak na przykład zastosowanie wzorów Cramera czy metody eliminacji Gaussa, których użycie w Excelu wymaga bardziej złożonych obliczeń, dlatego ich omówienie pominąłem. Skoro jednak znamy już funkcję REGLINP, warto powrócić do tego zagadnienia. Istotą działania funkcji REGLINP jest przecież rozwiązanie układu równań liniowych, tylko tych równań jest



RYSUNEK 7.1. Przykład ilustrujący nieprawidłowe wartości parametrów statystycznych podawane przez funkcję REGLINP w przypadku, gdy wyraz wolny jest równy zero (od wersji 2003)

z reguły więcej niż niewiadomych, więc funkcja REGLINP nie może znaleźć dokładnego rozwiązania układu wszystkich równań, lecz szuka rozwiązania przybliżonego, najlepiej dopasowanego do danych. Jeśli jednak liczba równań jest równa liczbie niewiadomych, to może istnieć rozwiązanie dokładne (o ile układ jest oznaczony). Dla funkcji REGLINP jest to przypadek nietypowy, bo liczba stopni swobody jest równa zero, więc funkcja nie może obliczyć żadnych statystyk regresji, ale same współczynniki, które odpowiadają w tym przypadku naszym niewiadomym — obliczyć może. Jedyne, o czym musimy pamiętać, to odwrócona kolejność niewiadomych w wynikach. Jak już pisałem, jest to specyfika funkcji REGLINP, którą zresztą też można wykorzystać (zobacz następny podpunkt).

Jeśli mamy do rozwiązania układ równań (w zapisie macierzowym):

$$A \times X = B$$

i chcemy go rozwiązać za pomocą funkcji REGLINP, musimy potraktować macierz współczynników A jako **znane_x**, natomiast wektor wyrazów wolnych B jako **znane_y**. Należy przyjąć, że funkcja nie oblicza wyrazu wolnego, dlatego trzeci argument funkcji REGLINP powinien być równy FAŁSZ (lub 0), a czwarty argument można pominąć (statystyka jest w tym przypadku nieistotna). Wyniki otrzymamy w wierszu (przy tradycyjnym sposobie rozwiązania była to kolumna) i w kolejności odwróconej w stosunku do kolejności kolumn w macierzy A .

Na przykład jeśli mamy układ czterech równań z czterema niewiadomymi x , y , z , w i kolejność kolumn w macierzy A odpowiada tej kolejności niewiadomych, to w wyniku funkcja REGLINP

RYSUNEK 7.2.
*Rozwiązanie układu
równań liniowych
za pomocą funkcji
REGLNP*

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "ukl_rown_lin.xls [Tryb zgodności] - Micro...". The formula bar displays the formula $\{=REGLINP(\$G\$9:\$G\$12;\$B\$9:\$E\$12;FAŁSZ)\}$ entered in cell B16.

The spreadsheet content is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Układ równań liniowych							
2									
3		$x + y - 2z + w - 5 = 0$							
4		$3x - y + 5z - w - 4 = 0$							
5		$-x + 2y + 3w = 0$							
6		$x + 3y - z + w - 3 = 0$							
7									
8		Macierz współczynników					Wyr.wolne		
9		1	1	-2	1		5		
10		3	-1	5	-1		4		
11		-1	2	0	3		0		
12		1	3	-1	1		3		
13									
14		Wynik					-8.88178E-16		
15		w =	z =	y =	x =		1,77636E-15		
16		1,355263	-0,73684	-0,63158	2,802632		-8.88178E-16		
17							-8.88178E-16		
18									

The status bar at the bottom shows "Gotowy" and a list of worksheets: "Arkusz1", "Arkusz2", "Arkusz3", and "Arkusz4". The zoom level is set to 100%.

To zagadnienie również było już wcześniej poruszane. W rozdziale 6. pokazałem, jak można je rozwiązać za pomocą funkcji INDEKS i PRZESUNIĘCIE. Temat będzie jeszcze kontynuowany w rozdziale 20. Z przedstawionych opisów wynika, że stosunkowo łatwo można zapisać formułę generującą rozwiązanie sekwencyjnie (formuła wymaga kopiowania do kolejnych komórek). Natomiast uzyskanie rozwiązania w formie wielokomórkowej formuły tablicowej zwracającej od razu cały wynik przydatny do dalszych obliczeń jest trudniejsze i wymaga użycia sposobów niestandardowych.

$$\begin{array}{rcl} 1^*x + 0^*y + 0^*z & = & 2 \\ 0^*x + 1^*y + 0^*z & = & 5 \\ 0^*x + 0^*y + 1^*z & = & 1 \end{array}$$
$$I \times X = B$$
$$X = B$$

Możemy zastosować do tego układu równań metodę opisaną w poprzednim podpunkcie. Jeśli jako argumentu **znane_x** użyjemy macierzy jednostkowej, otrzymamy wynik w postaci wektora **B**, czyli **znane_y**, w odwróconej kolejności. Ponadto, ponieważ macierz jednostkowa jest symetryczna, wektor przetwarzany (**znane_y**) może być zarówno w układzie pionowym, jak i poziomym. Natomiast wynik otrzymamy zawsze w układzie poziomym. W razie potrzeby można zastosować do niego transpozycję. Wykorzystanie tej metody ogranicza się wyłącznie do danych **liczbowych**.

W Excelu 2013+ sprawa jest prosta, bo istnieje funkcja generująca macierz jednostkową i wystarczy zapisać:

```
= REGLINP(znane_y; MACIERZ.JEDNOSTKOWA(ILE.NIEPUSTYCH(znane_y)); FAŁSZ)
```

We wcześniejszych wersjach programu trzeba wygenerować macierz jednostkową odpowiednią formułą [A4].

Jeśli **znane_y** składa się z wartości unikatowych, wystarczy taki zapis:

```
= REGLINP(znane_y; (znane_y = TRANSPONUJ(znane_y))*1; FAŁSZ)
```

Gdy przewidujemy możliwość wystąpienia duplikatów, przydatne może być zdefiniowanie i nazywanie tablicy bazowej:

```
wd : = WIERSZ(ADR.POŚR("1:"&ILE.NIEPUSTYCH(znane_y)))
```

i wykorzystanie jej w formule analogicznej do poprzedniej:

```
= REGLINP(znane_y; (wd = TRANSPONUJ(wd))*1; FAŁSZ)
```

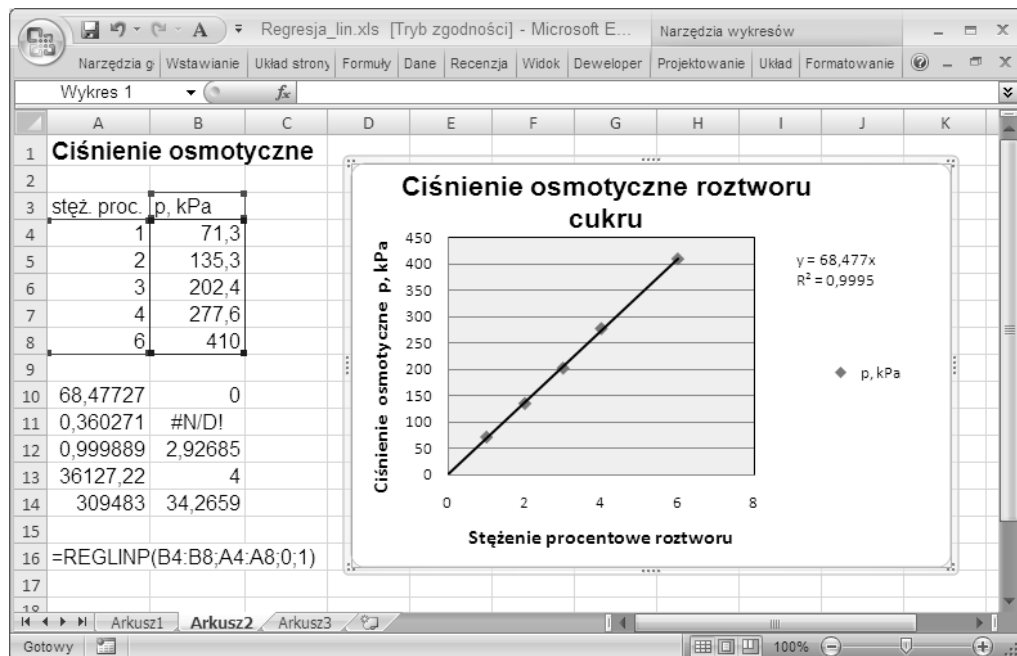
Wyniki uzyskane przy zastosowaniu funkcji MACIERZ.JEDNOSTKOWA są tablicami **TPW**, natomiast wyrażenia zawierające funkcję TRANSPONUJ wymagają w przypadku wykorzystania do dalszych obliczeń zatwierdzenia tablicowego.

Przykłady wyznaczania równań regresji

Przykład 7.1.

Dana jest zależność ciśnienia osmotycznego roztworu cukru od jego stężenia procentowego. Wykonamy wykres tej zależności i dopasujemy linię trendu — na wykresie wyświetlimy jej równanie i kwadrat współczynnika korelacji. Wykres powinien przechodzić przez początek układu współrzędnych.

Współczynnik proporcjonalności i współczynnik determinacji można wyznaczyć również za pomocą funkcji REGLINP. Niestety, jak już pisałem, w tym przypadku od wersji 2003 funkcja zwraca kwadrat niescentrowanego współczynnika korelacji zamiast tradycyjnego współczynnika. Z kolei w wersji 2007 Excela w przypadku korelacji wielomianem niekiedy nie jest wyświetlany współczynnik przy najwyższej potęgde **x**. (We wcześniejszych wersjach ten błąd nie występował). Dane i wyniki pokazano na rysunku 7.3. Dane do przykładu pochodzą z książki [10].



RYSUNEK 7.3. Zależność ciśnienia osmotycznego roztworu cukru od jego stężenia procentowego jako przykład regresji liniowej

Przy prowadzeniu obliczeń dotyczących regresji, począwszy od wersji 2007, można dodatkowo wykorzystać tabele Excela wraz z odwołaniami strukturalnymi. Nie uzyskamy przez to jakichś szczególnych ułatwień, lecz unikniemy kopiowania w kolumnach, które będzie się odbywać automatycznie, i nieco szybciej wprowadzimy nagłówki kolumn niż nazwy odpowiednich zakresów. Ponadto jeśli w jednym arkuszu chcemy umieścić kilka podobnych obliczeń, łatwiej zachować podobne schematy oznaczeń ze względu na to, że nagłówki kolumn w różnych tabelach mogą się powtarzać, a nazwy zakresów muszą być unikatowe w arkuszu.

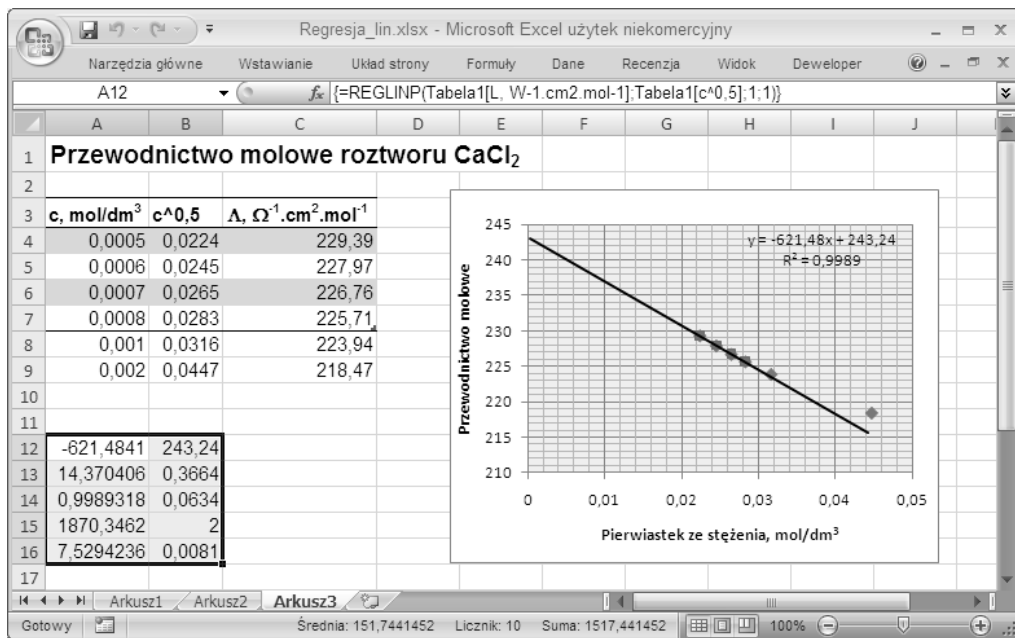
Przykład 7.2.

Dana jest zależność przewodnictwa molowego rozcieńczonych roztworów chlorku wapnia od stężenia molowego w temperaturze 25°C. (Dane pochodzą z książki [10]). Zgodnie z teorią rozcieńczonych roztworów elektrolitów przewodnictwo molowe powinno być liniową funkcją pierwiastka ze stężenia:

$$\Lambda = \Lambda_0 - k\sqrt{C}$$

Należy zweryfikować to równanie, obliczając jednocześnie jego współczynniki. Jeżeli chcemy wyznaczyć współczynniki na podstawie równania linii trendu z wykresu, to trzeba przygotować w arkuszu kolumnę z wartościami pierwiastka ze stężenia i wykorzystać tę kolumnę jako zmienną niezależną. W standardowym zestawie funkcji opisujących linię trendu nie przewidziano bowiem zależności tego typu. Korzystając z funkcji REGLINP, nie musimy przygotowywać kolumn pomocniczych. Można zastosować notację tablicową i jako *znane_x* podać PIERWIASTEK(stężenie) lub *stężenie*^0,5.

Dane i wyniki pokazano na rysunku 7.4. Zależność liniowa jest dobrze spełniana przez cztery pierwsze punkty, dlatego tylko te punkty wykorzystano do obliczeń.



RYСУNEK 7.4. Zależność przewodnictwa molowego rozcieńczonych roztworów chlorku wapnia od stężenia molowego w temperaturze 25 °C jako przykład regresji liniowej ze zmianą zmiennej niezależnej

Przykład 7.3.

Adsorpcję par na stałych adsorbentach opisuje się często równaniem izotermy Langmuira:

$$x = \frac{abp}{1 + bp}$$

gdzie:

x — ułamek wagowy określający ilość substancji zaadsorbowanej na jednostkę masy sorbenta;

p — cząstkowa prężność pary substancji adsorbowanej w równowadze z adsorbentem.

Równanie izotermy Langmuira jest nieliniowe i przed jego opracowaniem metodą regresji liniowej trzeba je przekształcić do postaci liniowej względem nowych zmiennych.

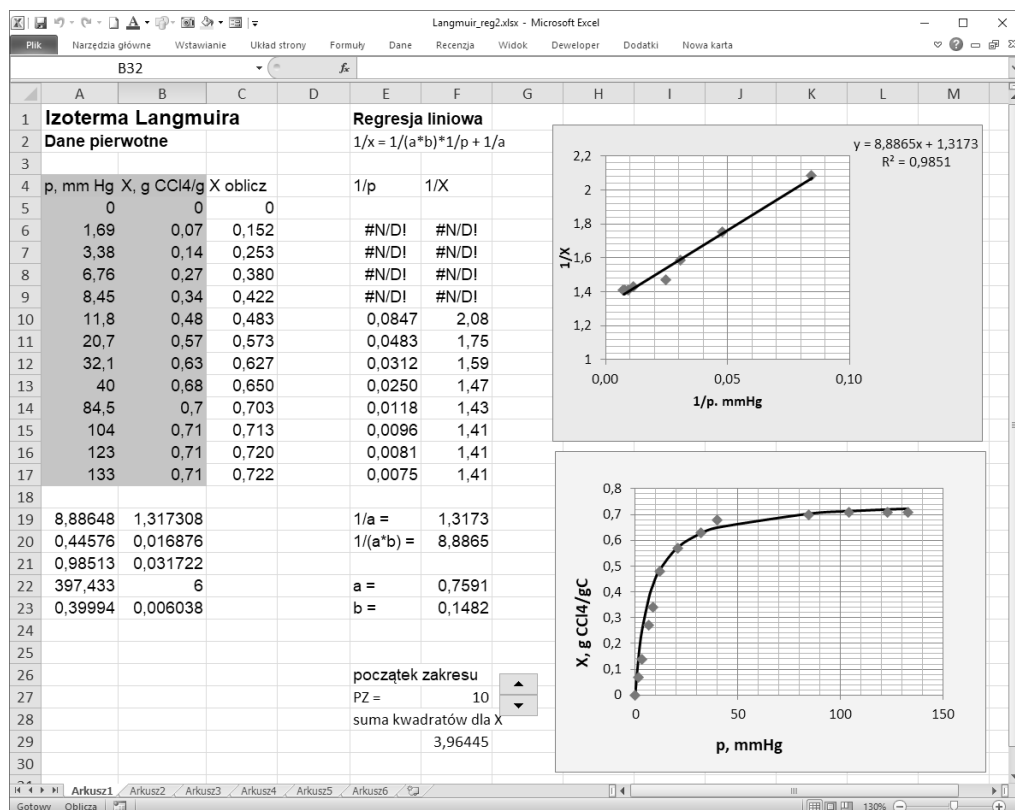
Sposoby przekształcenia podałem na początku rozdziału. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, można albo przekształcić zmienne w arkuszu w sposób jawny, wykonać wykres linearyzowany i odczytać współczynniki z równania linii trendu, albo zapisać przekształcenie zmiennych w argumentach funkcji REGLINP i odczytać współczynniki z wyniku funkcji.

Należy pamiętać, że przekształcenie zmiennych zmienia wagi poszczególnych punktów pomiarowych, na przykład po obliczeniu $1/x$ małe wartości x zyskują na znaczeniu, a duże tracą.

Po wstawieniu obliczonych współczynników do pierwotnego równania jakość dopasowania równania ze względu na początkowe zmienne może być niezadowalająca. W takim przypadku pomaga czasem rezygnacja z kilku skrajnych punktów.

Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 7.5. Dane do tego przykładu pochodzą z książki [7]. W zaprezentowanym przykładzie przy obliczaniu współczynników równania linearyzowanego pominięto cztery pierwsze punkty, aby uzyskać zadowalające wizualnie dopasowanie linii trendu do punktów z końca zakresu — po powrocie do pierwotnych zmiennych. Aby można było łatwo modyfikować zakresy punktów branych pod uwagę w obliczeniach, zdefiniowano komórkę przechowującą numer wiersza z początkowymi danymi. Komórce tej nadano nazwę **PZ** (komórka F27). Wszystkie adresy potrzebne do zdefiniowania zakresów roboczych są konstruowane z użyciem funkcji ADR.POŚR, której argumentem jest adres w postaci tekstowej. Tekst ten może być złożony z elementów oznaczających kolumnę i wiersz. Alternatywnie można użyć funkcji ADRES, która również pozwala na konstrukcję adresu w formie tekstowej z numerów wiersza i kolumny. Jeżeli na przykład chcemy odwołać się do komórki z kolumny B (jest to druga kolumna) i z wiersza o numerze pobranym z komórki **PZ**, to możemy użyć jednego z wyrażeń:

$$= \text{ADR.POŚR}(\text{"B"}\&\text{PZ}) \text{ lub } = \text{ADR.POŚR}(\text{ADRES}(\text{PZ};2))$$



RYСУNEK 7.5. Stopień adsorpcji par czterochloru węgla na węglu aktywnym jako przykład regresji według równania linearyzowanego

Funkcja `ADR.POŚR` wymaga argumentu tekstowego, dlatego użyto operatora połączenia tekstów `&`. Zawartość komórki **PZ** jest liczbą, ale zostanie automatycznie skonwertowana na tekst. Funkcja `ADRES [A3]` wymaga co najmniej dwu argumentów liczbowych: pierwszym jest numer wiersza, drugim numer kolumny. Można podać jeszcze argumenty opcjonalne, ale nie będą nam tu potrzebne.

Do wyznaczenia wartości zmiennych pomocniczych $1/p$ i $1/X$ użyto wyrażeń typu:

```
= JEŻELI(WIERSZ())>=PZ;1/A6;BRAK())
```

Funkcja `WIERSZ()` bez argumentów zwraca numer wiersza z miejsca wywołania. Wyrażenie oblicza wartości $1/p$, w tym przypadku $1/A6$, jeżeli wywołanie jest w wierszu o numerze **PZ** lub większym, w przeciwnym razie zwraca kod `#N/D!`.

Współczynniki w linearyzowanym równaniu regresji ($1/ab$ i $1/a$) obliczono ze wzoru:

```
= REGLINP(1/ADR.POŚR("B"&PZ):B17;1/ADR.POŚR("A"&PZ):A17;PRAWDA;PRAWDA)
```

Jest to oczywiście formuła tablicowa.

W analogiczny sposób można przeprowadzić obliczenia dla pozostałych wzorów linearyzujących izotermę Langmuira.

Przykład 7.4.

Często dane doświadczalne zawierają punkty, co do których można mieć wątpliwości, czy wartości zostały poprawnie zmierzone. Chcielibyśmy móc sprawdzić, jak zmieniłyby się wyniki regresji po wyeliminowaniu wątpliwych punktów. Można te punkty trwale wyeliminować, ale korzystniej byłoby mieć możliwość ich tymczasowego (odwracalnego) zamaskowania. Gdy korzystamy z regresji (linii trendu) na wykresie, sprawa jest dość prosta: wystarczy przenieść wartość y do sąsiedniej kolumny, pozostawiając pustą komórkę — równanie linii trendu zostanie wyznaczone z pominięciem usuniętych punktów. Jednak kiedy obliczamy współczynniki równania regresji lub wartości prognozowane za pomocą funkcji, sprawa nie jest już taka prosta. Funkcje `REGLINP` i `REGLINW` (oraz podobne) nie tolerują pustych komórek w zakresach danych, natomiast funkcje `NACHYLENIE`, `ODCIĘTA`, `R.KWADRAT` i `REGLINX` radzą sobie z tym problemem doskonale, ale za to zakres ich zastosowania nie jest tak szeroki jak wymienionych wcześniej funkcji. (Opisy funkcji `REGLINW` i `REGLINX` podałem w następnym rozdziale).

Jeśli chcemy zamaskować niektóre punkty w zakresie danych funkcji `REGLINP` lub `REGLINW`, musimy zastosować procedurę bardziej złożoną i utworzyć nowe ciągłe zakresy danych, w których zamaskowane punkty będą pominięte.

Zakresom pierwotnych danych nadajemy nazwy x i y . Zakładamy, że dane są zapisane w kolumnach. Wartości y , które mają być zamaskowane, przenosimy do sąsiedniej kolumny. Sprawdzamy liczebność danych (`ILE.LICZB(y)`) i tworzymy listę z numerami wierszy w zakresie y . Wykorzystujemy do tego znaną konstrukcję z funkcją `WIERSZ` (tablicę bazową):

```
z : = WIERSZ(ADR.POŚR("1:"&ILE.LICZB(y)))
```

Ustalamy położenie zamaskowanych punktów w zakresie y . W tym celu użyjemy funkcji PODAJ.
 ↪POZYCJĘ. Pierwszej pustej komórki szukamy za pomocą formuły tablicowej:

$$= \text{PODAJ.POZYCJĘ}("", y & "", 0)$$

Alternatywnie można użyć formuły zwykłej z funkcją INDEKS:

$$= \text{PODAJ.POZYCJĘ}("", \text{INDEKS}(y & ""); 0)$$

Pusta komórka musi być poszukiwana jako pusty tekst, po przekształceniu zakresu y w tekst. Służy do tego operacja łączenia zakresu y z pustym tekstem.

Aby znaleźć położenie kolejnych pustych komórek, trzeba zmodyfikować zakres do przeszukiwania tak, by zaczynał się za znalezioną pustą komórką. Odpowiednia formuła (tablicowa) może mieć postać:

$$= \text{PODAJ.POZYCJĘ}("", \text{PRZESUNIĘCIE}(y;p;0) & "", 0)+p$$

W tej formule p oznacza odwołanie (względne) do pozycji poprzedniej pustej komórki. Wzór można kopiować w dół lub w prawo; każde jego użycie wskazywać będzie kolejne puste komórki. Gdy uzyskamy wynik większy od długości zakresu y , będzie to oznaczać koniec zakresu i zarazem brak dalszych pustych komórek.

Wzór można też zmodyfikować tak, aby po osiągnięciu końca zakresu sygnalizował błąd:

$$= \text{JEŻELI.BŁĄD}(\text{PODAJ.POZYCJĘ}("", \text{PRZESUNIĘCIE}(y;p;0); \text{ILE.WIERSZY}(y)-p) & "", 0)+p; "koniec")$$

Dalej można wykorzystać funkcję MACIERZ. ILOCZYN. Jeśli dane x i y są w kolumnach, to numery punktów, które chcemy zamaskować, umieścimy w wierszu i nazwiemy ten wiersz wp . Zdefiniujemy nową tablicę bazową (pionową) opartą na numerach punktów zamaskowanych i nadamy jej nazwę wz :

$$wz : = \text{WIERSZ}(\text{ADR.POŚR}("1:" & \text{ILE.LICZB}(wp)))$$

Po zdefiniowaniu formuły indeksowej:

$$fi : = z + \text{MACIERZ.ILOCZYN}(\text{---}(z > wp - \text{TRANSPONUJ}(wz)); wz^0)$$

wartości współrzędnych punktów niezamaskowanych otrzymamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} &= \text{INDEKS}(x; fi) \\ &= \text{INDEKS}(y; fi) \end{aligned}$$

Te wyniki mają postać tablic TDW. Piszę o tym dokładniej w rozdziale 20. Aby użyć ich jako argumentów funkcji REGLINP lub REGLINW, należy wykorzystać jeden ze sposobów podanych we wspomnianym rozdziale.

Według sposobu 1. można użyć zapisu:

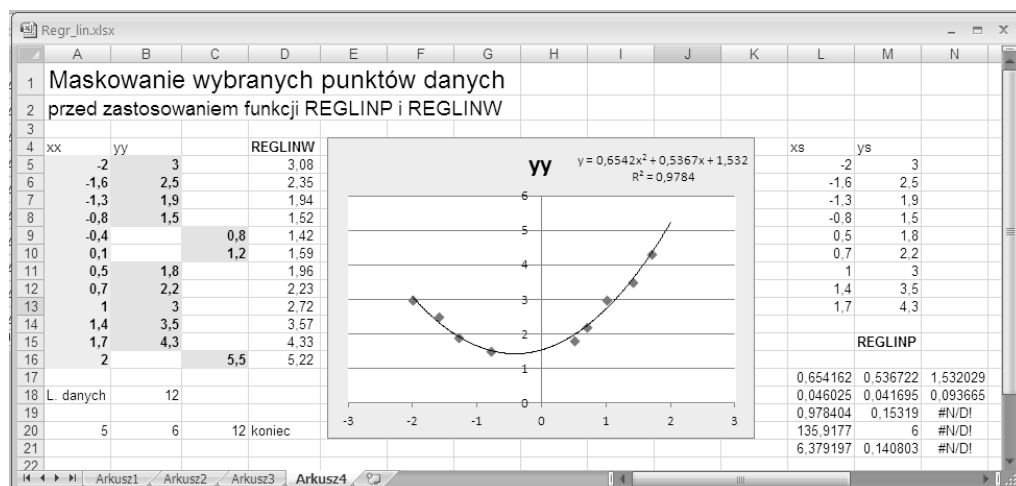
$$= \text{REGLINP}(\text{+INDEKS}(y; fi); \text{INDEKS}(x; fi)^{\{1;2\}}; ; \text{PRAWDA})$$

Według sposobu 2. należy obudować wyrażenie indeksowe fi funkcją L (lub N w wersji 2010+):

$$= \text{REGLINP}(\text{INDEKS}(y; L(fi)); \text{INDEKS}(x; L(fi))^{\{1;2\}}; ; \text{PRAWDA})$$

Funkcja INDEKS w takiej formie zwraca wynik pełnowartościowy, który może zostać użyty jako argument funkcji REGLINP, ale lepiej nadać formule nazwę, by potem móc ją wykorzystać również do zdefiniowania wykresu.

Przykład obliczeń wykonanych w ten sposób pokazano na rysunku 7.6.



RYСУNEK 7.6. Maskowanie wybranych punktów pomiarowych w celu umożliwienia obróbki danych za pomocą funkcji REGLINP i REGLINW

Można ten problem rozwiązać również inaczej. Po usunięciu wybranych punktów z zakresu y tworzymy listę indeksów pozostałych (nieusuniętych) punktów. Użyjemy do tego formuły, której można nadać nazwę **zs**:

```
zs := MIN.K(JEŻELI(y<>"";WIERSZ(y)-KOMÓRKA("wiersz";y)+1);
WIERSZ(ADR.POŚR("1:"&ILE.LICZB(y))))
```

Formuła ta zastosowana jako argument funkcji INDEKS utworzy listę współrzędnych nieusuniętych punktów. Listy tej można użyć w funkcji REGLINP. Przykładowo wywołanie funkcji może mieć postać:

```
= REGLINP(INDEKS(y;zs)*1;INDEKS(x;zs)^{1;2};;PRAWDA)
```

Wynikiem funkcji mają być współczynniki równania kwadratowego. Pierwszy argument funkcji REGLINP jest pomnożony przez 1, aby wyeliminować błąd wynikający z zastosowania funkcji INDEKS z argumentem tablicowym. W przypadku drugiego argumentu rolę tę spełnia podniesienie do potęgi.

Przykład 7.5.

Do problemu przedstawionego w poprzednim przykładzie można podejść również z drugiej strony. Zamiast usuwać niepotrzebne punkty można stworzyć listę numerów (indeksów) punktów, które chcemy pozostawić do analizy lub do prezentacji na wykresie. Sposób ten będzie wygodniejszy, gdy mamy stosunkowo dużo punktów do dyspozycji i chcemy wybrać tylko niektóre. Wyboru

można dokonać tradycyjnie, za pomocą funkcji INDEKS, ale takich przykładów było już dużo, więc tym razem wykorzystamy pseudozakresy. Wyrażenia te omawiam dość szczegółowo w rozdziale 21. Celem jest uzyskanie formuły pełnowartościowej, którą można wykorzystać zarówno do zdefiniowania wykresu, jak i do obliczeń za pomocą funkcji z grupy REGLINP.

Założmy, że pierwotne dane znajdują się w kolumnach, których pierwsze komórki oznaczono nazwami **px** i **py**. Utworzymy dodatkową kolumnę, **wyb** (można ją zdefiniować z zapasem), przeznaczoną do wpisywania indeksów punktów, które mają być uwzględnione w obliczeniach. Pierwszą komórkę tego zakresu oznaczmy jako **pwyb**. Należy teraz zdefiniować w *Menedżerze nazw* kilka formuł pomocniczych. Pierwsza definiuje listę wybranych punktów:

lista := PRZESUNIĘCIE(**pwyb**; ; ; ILE.NIEPUSTYCH(**wyb**)) - 1

Zakładam, że indeksy punktów w kolumnie **wyb** będą liczone od 1, jak w funkcji INDEKS, ponieważ jednak zamierzam wykorzystać funkcję PRZESUNIĘCIE, która liczy od 0, stąd potrzeba odjęcia jedynki w powyższym wzorze.

Jak już wspomniałem, do utworzenia roboczych (przefiltrowanych) tablic wartości **x** i **y** wykorzystamy pseudozakresy bazujące na funkcji PRZESUNIĘCIE. Mamy do wyboru trzy równoważne formuły, analogiczne do obu zmiennych. Oto te trzy warianty dla zmiennej **x** (w przypadku zmiennej **y** wystarczy zamienić **px** na **py**):

x.1 := L(PRZESUNIĘCIE(**px**; **lista**; 0))

x.2 := SUMA.JEŻELI(PRZESUNIĘCIE(**px**; **lista**; 0); "<1E100")

x.3 := SUMY.CZĘŚCIOWE(9; PRZESUNIĘCIE(**px**; **lista**; 0))

W wariantcie drugim należy podać warunek, który będzie spełniony przez wszystkie wybrane punkty.

Tak zdefiniowane tablice **x** i **y** mogą zostać wykorzystane zarówno w formułach, jak i przy określaniu danych do wykresów.

Jeszcze jeden sposób rozwiązania tego problemu przedstawiam w następnym rozdziale, w podrozdziale „Regresja danych o niejednakowej dokładności”.

Skorowidz

A

adres
 mieszany, 312
 w postaci tekstowej, 188
 względny, 58, 313, 314
aproksymacja
 dokładność, 260, 261
 metoda
 $\frac{3}{4}$, 259, 260, 263
 kwadratur, 258, 260
 parabol, 259, 260, 263, 271
 prostokątów, 258, 260, 261, 262, 263
 Simpsona, 258, 259, 261, 262, 263, 267, 271
 trapezów, 258, 260, 261, 262, 263, 267, 274

B

błąd, 244
 #ADR!, 482
 #ARG!, 483, 507
 #LICZBA!, 97, 561
 #N/D!, 173, 482, 525, 561
 bezwzględny, 81
 losowy, 563
 maksymalny, 81, 82
 słupek, *Patrz:* słupek błędu
 standardowy, 42
 średni
 kwadratowy, 84
 oszacowania wartości, 171, 217
 względny, 81, 82, 88
 maksymalny, 82
 różnicy, 87
 sumy, 87
 zaokrąglenia, 92
B-splajn, *Patrz:* splajn

C

całka
 Arrheniusa, 278, 279, 280, 302
 niewłaściwa, 277
 ekstrapolacja, 277
 przekształcenie w całkę właściwą, 277, 278
 obliczanie granicy całkowania, 281, 282, 283, 286
 oznaczona, 257, 258, 260, 262, 266, 291
 iteracja, 274, 275
 odwołanie cykliczne, 274, 275
 zmiana granic, 270, 271
 temperaturowa, *Patrz:* całka Arrheniusa
ciąg liczbowy, 289
cyfra
 dokładna, 85
 znacząca, 85, 90, 100
czas, 101, 102, 411, 423, 426
dokładność, 413
konwersja
 jednostek, 433
 ułamki dziesiętne, 439
operacje, 431
wprowadzanie, 412
zapis, 412, 413
 minuty w indeksie górnym, 440
 niestandardowy, 437

D

dane
 do wykresu punktowego, *Patrz:* wykres
 punktowy dane
duplikat, 559
o niejednakowej dokładności, 210

dane

- pomiarowe, 72, 73, 110
 - charakterystyka, 168, 171
 - obciążone błędami, 244

standaryzowanie, 168

data, 102, 411

- długa, 414, 415
- krótka, 414, 415
- obliczanie
 - początku następnego tygodnia, 434
 - różnic, 433
- operacje, 431, 433, 434, 435
- wprowadzanie, 414, 416
- wyświetlanie
 - dnia tygodnia, 436
 - nazwy miesiąca, 436
 - numeru dnia tygodnia, 436
 - numeru miesiąca, 436

dokładność

- obliczeń, 90, 91, 92
- pomiaru, 81

F

formuła

- arkuszowa, 35
- nazwana, 35, 58, 59, 269, 317, 319, 553, 554
- tablicowa, 292, 501
 - z funkcją ADR.POŚR, 542, 544
 - z funkcją PRZESUNIĘCIE, 545
- w postaci tekstowej, *Patrz:* wyrażenie w postaci tekstowej
- warunkowa cykliczna, 568
- zatrząskowa, 563, 565, 566
 - faza czuwania, 566
 - faza inicjacji, 566, 568
 - wykonanie wielokrotne, 567

funkcja

- ADR.POŚR, 188, 189, 507, 509, 510, 514, 527, 542, 544
- ADRES, 188
- AGREGUJ, 507, 508, 518, 552
- agregująca, 380, 483, 502, 503, 508, 523, 526, 546
- aproksymacja wielomianem, 110
- aproksymująca, 111, 113
- BD.MAX, 532
- BIT.PRZESUNIĘCIE.W.LEWO, 573
- BIT.PRZESUNIĘCIE.W.PRAWO, 573

bitowa, 573

- celu, 154
- CENA.DZIES, 438, 439
- CENA.UŁAM, 437
- ciągła, 59, 105
 - wykres, *Patrz:* wykres funkcji ciągłej
- COMPLEX, 116, 117
- CONVERT, 387, 389, 390, 433
- CZAS, 426, 431
- CZAS.WARTOŚĆ, 427
- CZĘSTOŚĆ, 360, 463, 508, 529
- CZĘŚĆ.ROKU, 431
- CZY.ADR, 479, 507, 509
- CZY.LICZBA, 380
- CZY.TEKST, 380
- DATA, 102, 417, 418, 419, 420, 431, 432
- DATA.WARTOŚĆ, 417, 420
- DEC2BIN, 385
- DEC2HEX, 385
- DŁ, 443, 447
- DNI, 421
- DNI.360, 421
- DNI.ROBOCZE, 423
- DNI.ROBOCZE.NIESTAND, 424
- DOLLARDE, 438
- DOLLARFR, 437
- dwu zmiennych, 68
 - interpolacja, 251, 252, 254
- DZIEŃ, 421, 431
- DZIEŃ.ROBOCZY, 429, 435
- DZIEŃ.ROBOCZY.NIESTAND, 430
- DZIEŃ.TYG, 427
- DZIES.NA.DWÓJK, 385
- DZIES.NA.SZESN, 385
- DZIŚ, 427
- ekstremum, 133
- EOMONTH, 422
- Evaluate, 60, 270
- EXP, 91, 291
- FACTDOUBLE, 300
- FRAGMENT.TEKSTU, 443, 444, 448, 449, 450, 456
- GODZINA, 423, 431
- homograficzna, 166
- ILE.LICZB, 168, 479, 483, 507, 508
- ILE.NIEPUSTYCH, 479, 483, 507, 508
- ILE.WIERSZY, 479, 483, 508, 529
- ILOCZYN, 508

- INDEKS, 62, 311, 507, 515, 516, 529, 536, 538,
539, 541, 546
błąd, 482
odwracanie porządku elementów
w tablicy, 500
odwracanie porządku elementów
w zakresie, 499
tworzenie ciągłego zakresu, 499
z argumentami indeksowymi w postaci
tablic, 477, 479, 480, 481, 482, 500
- ISO.NUM.TYG, 429
ISO.ZAOKR.W.GÓRĘ, 98
JEŻELI, 116, 117, 478, 507, 508, 514, 550
KOD, 444
KOMBINACJE, 362
KOMBINACJE.A, 362
KOMÓRKA, 38, 58, 507, 508, 514, 533, 534
KONWERTUJ, 387, 389, 390, 392, 433
KOWARIANCJA, 170, 174
KOWARIANCJA.POPUL, 170
KOWARIANCJA.PRÓBK, 170
KWARTYL, 508, 529
KWOTA, 96, 460
L, 507, 508, 511, 513
LEWY, 443, 444, 448, 465
LICZ.JEŻELI, 507, 508
LICZ.PUSTE, 507, 508
LICZ.WARUNKI, 508
LICZBA.CAŁK, 93, 95, 439
LICZBA.KOLUMN, 479, 508, 529
LICZBA.ZESP, 116, 117
LITERY.MAŁE, 444, 456
LITERY.WIELKIE, 444, 457
logarytmiczna, 157
LOS, 508, 535, 562, 563, 564
LOS.ZAKR, 562, 563
MACIERZ.ILOCZYN, 136, 147, 149, 546, 552
MACIERZ.JEDNOSTKOWA, 185
MACIERZ.ODW, 147
makr, 64, 269, 276, 507, 508
MAKS.WARUNKÓW, 508
MAX, 508, 550
MAX.K, 508, 529
MEDIANA, 549, 550
MIESIĄC, 102, 423, 431
MIN, 508, 550
MIN.K, 508, 529
MIN.WARUNKÓW, 508
minimum, 154
MINUTA, 423, 431
MOD, 102, 439, 551
MODUŁ.LICZBY, 116, 550
modułowa, 17
MULTINOMIAL, 360, 362
N, 507, 508, 511, 513
NACHYLENIE, 173, 174, 189
NETWORKDAYS, 423
nieciągła, 58, 61, 556
NR.KOLUMNY, 503, 508, 510, 545
NR.SER.DATY, 422, 432
NR.SER.OST.DN.MIES, 422
NUM.TYG, 428
O.FORMULE, 507, 508, 514, 536
O.KOMÓRCE, 507, 508, 514, 536
OBLICZ, 270, 275
OBSZARY, 507, 508
OCT2DEC, 385
OCZYŚĆ, 444, 446
ODCH.KWADRATOWE, 168
ODCH.STAND.POPUL, 169
ODCH.STANDARD.POPUL, 84, 169
ODCH.STANDARD.PRÓBK, 43, 84, 169
ODCH.STANDARDOWE, 43, 84, 169
ODCIEŃ, 173, 174, 189
odwołaniowa, 483, 530, 531, 532, 533, 534, 536
ÓSM.NA.DZIES, 385
PEARSON, 170
PERCENTYL, 508, 529
PERMUTACJE, 356, 357
PIERWIASTEK, 116
pochodna, 105
drugiego rzędu, 108
obliczanie numeryczne, 108, 110
obliczanie za pośrednictwem funkcji
aproksymującej, 111, 113
punkt krytyczny, 108
punkt przegięcia, 108
szacowanie, 106
PODAJ.POZYCJĘ, 58, 62, 461, 508, 529
podcałkowa, 258, 281, 283, 286
aproksymacja, 258, *Patrz też:* aproksymacja
obliczanie, 268
PODSTAW, 444, 446, 451
POŁĄCZ.TEKSTY, 444, 459, 470
PORÓWNAJ, 447
POTĘGA, 356

funkcja

POWT, 444, 456
 POZYCJA, 508, 559, 564
 PRAWDPD, 560, 561
 PRAWY, 443, 444, 448
 PROC.POZ.PRZEDZ.OTW, 557
 PROC.POZ.PRZEDZ.ZAMK, 557
 PROCENT.POZYCJA, 508, 529, 554, 555, 556, 557, 558
 nieciągłość, 556
 zastosowania, 558
 prognozująca, 111
 PRZESUNIĘCIE, 58, 62, 310, 507, 510, 514, 527, 537, 538, 539, 541, 545
 punkt nieciągłości, 58
 R.KWADRAT, 170, 173, 174, 176, 189
 RANDBETWEEN, 562
 REGBLSTD, 173, 174
 REGEXPP, 196, 197, 198, 229
 REGEXPW, 196, 198, 199, 200, 201
 REGLINP, 111, 174, 175, 189, 193, 197, 200, 202, 245, 246, 256, 508, 529
 nietypowe zastosowania, 182, 183, 184, 185, 186
 przy braku wyrazu wolnego, 181, 182
 z wagami, 211
 REGLINW, 111, 189, 194, 195, 201, 202, 245, 246, 252, 253, 256
 REGLINX, 189, 195, 242, 243
 rozwiniecie, 236
 REGLINX.ETS, 237
 REGLINX.ETS.CONFINT, 238
 REGLINX.ETS.SEZONOWOŚĆ, 237
 REGLINX.ETS.STATYSTYKA, 238
 REGLINX.LINIOWA, 236
 ROK, 102, 431
 Round, 86
 ROZKŁAD.LIN.GAMMA, 278, 300
 SEKUNDA, 426, 431
 SERIE, 30
 SERIESSUM, 136, 508, 529
 SILNIA, 91, 300
 SILNIA.DWUKR, 300
 sklejana, *Patrz:* splajn
 SUMA, 300, 380, 508, 551, 552
 SUMA.ILOCZYNÓW, 265, 300, 439, 551
 formuła narastająca, 569
 SUMA.JEŻELI, 507, 508

SUMA.KWADRATÓW, 149, 508
 SUMA.SZER.POT, 508, 529
 SUMY.CZĘŚCIOWE, 507, 508, 518, 519, 520, 546, 552, 571
 SUMY.JEŻELI, 520, 522
 SZACUJ, 60, 269, 276
 SZUKAJ.TEKST, 443, 454, 455, 461, 462, 463
 ŚREDNIA, 168, 174, 508, 552
 ŚREDNIA.JEŻELI, 508
 ŚREDNIA.WARUNKÓW, 508
 ŚREDNIA.WEWN, 508, 529
 T, 460, 507, 508, 511
 tablicowa, 175, 198, 262, 481, 483, 502, 503, 508, 528, 529, 530
 TEKST, 98, 99, 100, 103, 382, 436, 460, 474
 TERAZ, 425
 TEST.Z, 508, 529
 TRANSPONUJ, 185, 473, 481, 503
 TYP, 479, 483
 UDF, 36, 40, 270, 481, 566
 ulotna, 508, 562
 zamrażanie, 563, 565
 UMA.WARUNKÓW, 508
 USUŃ.ZBĘDNE.ODSTĘPY, 444, 446, 464
 użytkownika, 481
 WARIANCJA, 169
 WARIANCJA.POP, 169
 WARIANCJA.POPUL, 169, 174
 WARIANCJA.PRÓBK, 169
 WARTOŚĆ, 96, 457
 WARTOŚĆ.LICZBOWA, 382
 WIELOMIAN, 360
 WIERSZ, 503, 508, 510, 545
 WORKDAY, 429
 WSP.KORELACJI, 170, 176
 WYBIERZ, 116, 117, 507, 508, 514
 WYST.NAJCZĘŚCIEJ, 366, 508, 527
 WYSZUKAJ, 508, 529, 530
 WYSZUKAJ.PIONOWO, 461, 508, 529
 WYSZUKAJ.POZIOMO, 461, 508, 529
 Z.WIELKIEJ.LITERY, 444, 457
 ZAOKR, 93, 95, 101
 ZAOKR.DO.CAŁK, 96, 102
 ZAOKR.DO.NPARZ, 97
 ZAOKR.DO.PARZ, 96
 ZAOKR.DO.TEKST, 95, 96, 100, 382, 444, 460
 ZAOKR.DO.WIELOKR, 97, 102
 ZAOKR.DÓŁ, 95

ZAOKR.GÓRA, 95
 ZAOKR.W.DÓŁ, 97, 101
 ZAOKR.W.DÓŁ.DOKŁ, 97
 ZAOKR.W.DÓŁ.MATEMATYCZNE, 97
 ZAOKR.W.GÓRĘ, 97
 ZAOKR.W.GÓRĘ.DOKŁ, 98
 ZAOKR.W.GÓRĘ.MATEMATYCZNE, 98
 ZASTĄP, 443, 444, 452, 453
 ZAZNACZENIE, 64
 ZŁĄCZ.TEKST, 444, 459, 470
 ZŁĄCZ.TEKSTY, 444, 458, 470, 473
 ZNAJDŹ, 443, 450, 451, 462, 463
 ZNAK, 444

I

iloraz różnicowy, 105, 108
 interpolacja
 funkcja
 REGLINP, 256
 REGLINW, 252, 253, 256
 kubiczna, 245
 funkcji dwu zmiennych, 254
 liniowa, 241
 funkcji dwu zmiennych, 251, 252
 odwrócona, 558
 za pomocą funkcji sklepanych, 246, 249
 izoterma Langmuira, 187

K

karta
 Formatowanie, 27
 Projektowanie, 27
 Słupki błędów, 42
 Układ, 27, 42
 kod
 ANSI, *Patrz:* kod ASCII
 ASCII, 443, 445, 447
 Unicode, 443, 444, 445, 446, 447
 kombinacja, 360, 362
 generowanie, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 377
 numer, 371
 z powtórzeniami, 361, 362
 generowanie, 377
 kombinatoryka, 355
 terminologia, 362
 komórka, 380

korelacja, 175, 176
 liniowa, 231, 233
 nieliniowa, 231, 235
 Pearsona, 170
 kowariancja, 169
 kreator, 26
 kryterium statystyczne Fishera-Snedecora, 172
 krzywa
 Lissajous, 68, 69
 miareczkowania kwasowo-zasadowego, 110

L

liczba
 budowanie z cyfr, 551
 całkowita suma cyfr, 550
 część całkowita, 102
 długość, 90
 dwójkowa, 384, 385
 formatowanie, 92, 93
 kolejna, 411
 konwersja, 381
 pseudolosowa, 562
 rząd, 85
 seryjna, 411
 sposób wyświetlania, 38
 szesnastkowa, 384, 385
 wygląd, 380, 450, 456
 zaokrąglanie, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 101
 wartości czasu, 101
 z uwzględnieniem cyfr znaczących, 100
 zasady, 86
 zapis naukowy, 85
 zespolona, 116, 135
 liczbotekst, 380, 444, 457
 konwersja na liczbę, 383, 384
 linia
 najlepszego dopasowania, 47
 regresji, *Patrz:* linia trendu
 trendu, 24, 25, 28, 175, *Patrz też:* trend
 nachylenie, 231
 tworzenie, 48

M

macierz, 145
 iloczyn, 146, 147
 odwrotna, 146, 147, 184
 mapa w formie drzewa, 23

metoda

Cranka-Nicolsona, *Patrz*: schemat różnicowy
 niejawny
 eliminacji Gaussa, 182
 Eulera, 308, 315, 323
 modyfikacje, 316, 317, 318, 319
 gaussowska, *Patrz*: zasada cyfry parzystej
 iteracji prostej, 119, 120, 121, 123
 kupiecka, *Patrz*: zasada cyfry parzystej
 nadrelaksacji, 340
 najmniejszej sumy kwadratów, 173, 213, 218, 235
 Newtona, *Patrz*: metoda stycznych
 Newtona-Raphsona, 161
 regresji, *Patrz*: regresja
 różnic skończonych, 333, 338, 342
 różniczki zupełnej, 82, 83, 86
 Rungego-Kutty, 320, 321, 322, 323
 siatek, *Patrz*: metoda różnic skończonych
 siecznych, 123, 128
 zbieżność, 125
 strzałów, 331
 stycznych, 125, 126, 282
 Microsoft Query, 17

N

nadrelaksacja, 341

narzędzie

Analysis ToolPak, 385
 Dane/Tekst jako kolumny, 381
 Solver, 133, 140, 149, 154, 157, 215, 219, 343
 Sprawdzanie błędów, 383
 Szukaj wyniku, 131, 157
 Wklej specjalnie, 383
 Znajdź i zaznacz/Zamień, 381

nazwa przypisana do adresu

mieszanego, 312
 względnego, 313, 314

O

odchylenie

kwadratowe, 168
 standardowe, 42, 43, 169
 średnie, 169

odwołanie

absolutne, 30
 cykliczne, 129, 131, 158, 274, 340, 568
 strukturalne, 314, 318

oś

dodatkowa, *Patrz*: oś pomocnicza
 głębokości, 52
 główna, 29
 kategorii, *Patrz*: oś pozioma
 odciętych, *Patrz*: oś pozioma
 pionowa, 24
 pomocnicza, 29
 pozioma, 24, 26
 rzędnych, *Patrz*: oś pionowa
 skalowanie
 automatyczne, 40
 nierównomierne, 76, 77
 ręczne, 40, 77
 w skali logarytmicznej, 28
 wartości, *Patrz*: oś pionowa

P

permutacja, 357, 362

generowanie, 368, 369
 nieporządku, *Patrz*: przestawienie
 z powtórzeniami, 359, 362
 generowanie, 369

podsilnia, 358, 359

pomiar

bezpośredni, 81
 błąd, *Patrz*: błąd
 dokładność, 81

Power Query, 17

prawdopodobieństwo, 560

prawo

iloczynu, 356
 rozcieńczeń Ostwalda, 228
 sumy, 355

przestawienie, 358

przybliżenie startowe, 154, 157, 158, 160, 161, 214

pseudofunkcja, 425

pseudozakres, *Patrz*: PZ

PZ, 32, 507, 510

argument, 508

I rodzaju, 510, 511, 518, 523, 533

II rodzaju, 510, 513, 518, 527, 533

jako argument funkcji

AGREGUJ, 518

agregującej, 523, 526

baz danych, 530, 531, 532

INDEKS, 515, 516, 517, 536

JEŻELI, 514

KOMÓRKA, 533, 534

L, 511

makr XLM, 536

PRZESUNIĘCIE, 537, 538, 539, 541

SUMY.CZĘŚCIOWE, 518, 519, 520

SUMY.JEŻELI, 520, 522

tablicowej, 528, 529, 530

WYBIERZ, 514

nazwany, 508

z funkcją

ADR.POŚR, *Patrz:* PZ I rodzaju

PRZESUNIĘCIE, *Patrz:* PZ II rodzaju

R

regresja

liniowa, 111, 165, 167, 236

wielomianu dwu zmiennych, 202, 203,
205, 207

wielowymiarowa, *Patrz:* regresja
wielokrotna

logistyczna, 217, 218, 220

nieliniowa, 167, 213, 217, 219, 224
metodą iteracyjną, 229, 230

postać wykładnicza, 196

postać zlogarytmowana, 196

quasi-liniowa, 215, 222

wielokrotna, 194

wielomianowa, *Patrz:* regresja wielokrotna

reguła fałsi, *Patrz:* metoda siecznych

rozkład dyskretny, 563

równanie

izotermi Langmuira, 187

kinetyczne, 324, 326, 328

kwadratowe, 115, 116, 118

Laplace'a, 337

liniowe, 165, 166

układ, *Patrz:* układ równań liniowych
ze znanym współczynnikiem kierunkowym,
180, 181

nieliniowe

linearyzacja, 166, 167, 214

układ, *Patrz:* układ równań nieliniowych

regresji, 171, 174

ocena jakości, 172

postać wykładnicza, 196

postać zlogarytmowana, 196

wyznaczanie, 172

różniczkowe, 307, 320, 321, 322, 323, 324, 326, 328

cząstkowe, 337, 338, 344, 346, 347, 352

eliptyczne, 337, 338

hiperboliczne, 337

hiperboliczno-eliptyczne, 337

paraboliczne, 337, 344, 346, 347, 352

rozwiązanie, 307

rząd, 307

warunki początkowe, 307

zagadnienie początkowe, *Patrz:* zagadnienie
początkowe

zwyczajne, 307, 329, 330, 333

wielomianowe, 115, 119, 120, 121, 123, 125,
126, 131, 133, 134, 140, 141

metoda iteracji prostej, *Patrz:* metoda

iteracji prostej

metoda siecznych, *Patrz:* metoda siecznych

oblicznie, 135

pierwiastek, 135, 137, 138, 140

wykładnicze, 166

różnica

centralna, 105, 106, 319

przednia, 105

wsteczna, 105

różniczkowanie, 105

numeryczne, 105, 108, 110

S

schemat różnicowy

jawny, 348, 349, 352

niejawny, 348, 352

separator, 379

seria, 25, 27

dodawanie, 27

modyfikowanie, 30

nazwa, 27, 30

wybór, 62

zróznicowanie skali, 29

skala

logarytmiczna, 28, 77

odwrotności, 76, 77

pierwiastkowa, 76

słupek błędu, 41, 43, 45, 76

opcje, 41

zastosowanie niestandardowe, 45, 46

splajn, 246, 249

stała
 czasowa, 412
 dysocjacji, 228
 tablicowa, 65, 472
 statystyka matematyczna, 17
 stopień swobody, 171
 subsilnia, *Patrz:* podsilnia
 suma
 kwadratów, 166, 165
 regresyjna, 172
 resztkowa, 171, 172, 210
 z wagami, 210, 211
 SWI, 480, 481, 483, 514, 534
 system
 daty 1900, 411, 412
 daty 1904, 411, 413
 jednostek
 CGS, 387
 niemetrycznych, 387
 przeliczanie, 387, 389, 390
 SI, 387
 temperatura, 390
 pozycyjny, 384
 operacje arytmetyczne, 386
 szereg, 289, 300
 asymptotyczny, 303
 geometryczny, 289
 hipergeometryczny, 301
 Maclaurina, 290, 302
 naprzemienny, 289
 potęgowy, 290, 296, 346
 potęgowy Taylora, 214
 suma, 291, 292, 296, 299
 liczba wyrazów, 292, 293, 295
 obliczenia iteracyjne, 297
 Taylora, 162, 290
 zbieżny, 289
 zdefiniowany rekurencyjnie, 299
 szumu usuwanie, 72, 73

Ś

średnia arytmetyczna, 168

T

tabela przestawna, 17
 tablica
 bazowa, 500
 równoległa, 547

do obliczeń, *Patrz:* TDO
 do wyświetlania, *Patrz:* TDW
 dwuwymiarowa, 501
 element sumowanie, 501, 502
 kolumna
 łączenie, 503
 ukryta, 552, 553, 554
 usuwanie, 503
 nazwana, 479, *Patrz:* TN
 pełnowartościowa, *Patrz:* TPW
 quasi-pełnowartościowa, *Patrz:* TQP
 wiersz
 łączenie, 503
 usuwanie, 503
 wstawianie, 570, 571
 TDO, 508, 509
 TDW, 478, 479, 484, 503, 509, 512, 514, 516, 518,
 533, 543
 tekst, 443
 fragment, 448, 453
 konwersja
 na datę, 417
 na liczbę, 457
 liczba znaków, 447
 łączenie, 458, 459, 470, 472
 obliczenia iteracyjne, 470, 471, 472
 podział, 464, 465
 wygląd, 380
 wyodrębnianie
 cyfr, 467
 liczby, 466, 467
 zliczanie słów, 463
 TN, 479, 509
 TPA, 478
 TPW, 478, 480, 509, 514, 530
 TQP, 479, 481, 509
 trend
 linia, *Patrz:* linia trendu
 liniowy, 244
 logarytmiczny, 28
 potęgowy, 28
 wykładniczy, 28

U

układ równań
 liniowych, 145, 182
 rozwiązanie, 146, 149, 150
 nieliniowych, 151, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 160
 nieokreślony, 146

ułamek

łańcuchowy, 304

zwykły, 437

ustawienia lokalne, 379, 383

data, 414

V

VBA, 16, 270, 481, 482

Visual Basic for Applications, *Patrz*: VBA

W

wariacja, 362

bez powtórzeń, 357

generowanie, 366, 367

numer, 365, 368

z powtórzeniami, 356, 362, 363

generowanie, 363, 364, 365, 366

wariancja

populacji, 168

próbki, 168

regresji, 172

resztkowa, 171, 172

pierwiastek, *Patrz*: błąd średni oszacowania

wartości

wielomian, 135, 137, 138

całka, 138

Lagrange’a, 245, 256

pochodna, 138

rozkład na czynniki liniowy i kwadratowy, 142

stopnia

czwartego, 142

drugiego, *Patrz*: równanie kwadratowe

trzeciego, 119, 140, 141, 142, 245, 246

wielozbiór, 362, 369

współczynnik

determinacji, 172, 175, 176, 179, 181, 185, 206, 207

niescentrowany, 178, 179, 181, 182

skorygowany, 207, 208

korelacji, 175, 176, 181, 206

Pearsona, 170

regresji, 193

nieliniowej, 217

współrzędna biegunowa, 50

wykres, 23

animowany, 68

Arrheniusa, 76, 77, 79

bąbelkowy, 23

cieniowany, 74, 75

cyldryczny, 23, 26

etykieta przy punktach wykresu, 70, 71

figura geometryczna, 65

funkcji

ciągłej, 26

dwu zmiennych, 68

giełdowy, 23, 26

hierarchiczny, 23

histogram, 23

jako szablon, 38

kaskadowy, 23

kolumnowy, 23, 26, 46

kołowy, 23

kopiowanie z arkusza do arkusza, 38, 39

kreator, *Patrz*: kreator

krzywych Lissajous, 68

liniowy, 23, 24, 25

nieciągły, 32, 33, 34, 35, 36, 58, 61

ostroslupowy, 23, 26

Pareto, 23

pierścieniowy, 23

powierzchniowy, 23, 24, 52

przebiegu w czasie, 54, 55

przystawny, 17

pudełkowy, 23

punktowy, 18, 23, 24, 25, 57, 74

dane, 26

nierównomierna skala, 76, 77, 79

wykonanie, 26, 27

punkty połączone linią, 31

radarowy, 23, 24, 50

schodkowy, 45

słupkowy, 23, 26

statystyczny, 23

stopniowe ujawnianie danych, 63

stożkowy, 23, 26

w komórce, 54, 55

warstwowy, 23, 26, 74

formatowanie, 75

widmowy, 45, 46

wielokąt foremny, 65

wodospadowy, *Patrz*: wykres kaskadowy

XY, *Patrz*: wykres punktowy

z zaznaczenia, 64

zakres danych, 30, 32

dynamiczny, 36, 37

określany przez formułę, 37

złożony, 32, 33

wyrażenie

indeksowe, 482, 483, 484, 485

specjalne, *Patrz*: SWI

w postaci tekstowej, 571, 572, 573

wzór

Cramera, 182

Maclaurina, 290

Newtona, 282

Taylora, 290

Viéte'a, 137, 140

Z

zagadnienie początkowe, 308, 324, 329, 330, 333

zakres

do obliczeń, 508, *Patrz*: ZDO

odwracanie porządku elementów, 499

przekształcanie na stałą tablicową, 472

zakres danych

dynamiczny, 59

z zaznaczenia, 64

zakres do wyświetlania, *Patrz*: ZDW

zasada cyfry parzystej, 86

ZDO, 518, 530

ZDW, 478, 479, 514, 515, 516, 518, 530, 533

struktura pasiasta, 507

znak

gwiazdki, 461

LF, 445

niedrukowalny, 446

spacja

nierozdzielająca, 446

wiodąca, 446

wieloznaczny, 455, *Patrz też*: znak zastępczy

zapytania, 461

zastępczy, 461

zero wiodące, 468, 469

PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA
Helion 

Obliczenia i wykresy w Excelu? Nic trudnego!

- Wykonuj obliczenia
- Twórz wykresy
- Zrozum Excela

Na rynku nie brakuje książek opisujących obsługę i zastosowania arkusza kalkulacyjnego MS Excel, żadna jednak nie wprowadzi Cię w tę tematykę tak skutecznie jak ta! Omiń rafa i białe plamy dokumentacji, skorzystaj z doświadczenia autora i śmiało wkrocz w świat niesamowitych możliwości Excela.

Książka przedstawia sposoby tworzenia i zastosowania wykresów w Excelu. Przybliża zagadnienie zaokrąglania liczb, a także prezentuje metody przeprowadzania w arkuszu kalkulacyjnym różnego rodzaju obliczeń matematycznych, w tym różniczkowania, całkowania, rozwiązywania równań i układów równań oraz przetwarzania liczb zespolonych.

- Graficzna reprezentacja danych
- Zaokrąglanie liczb i obliczenia przybliżone
- Równania i układy równań nieliniowych
- Regresja i interpolacja
- Obliczanie całek oznaczonych
- Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe
- Szeregi potęgowe i kombinatoryka
- Konwersja liczb i jednostek
- Liczby i funkcje zespolone
- Przetwarzanie tekstów, dat i czasów

Dowiedz się, jak wykorzystać Excela do obliczeń i wizualizowania wyników!

Helion 	Sprawdź nasze szkolenia!	KOD KORZYŚCI Sięgnij po więcej! 
 helion.pl	SZKOLENIA 	
 HELION SA ul. Kościuszki 1c 44-100 Gliwice tel.: 32 230 98 63 helion@helion.pl	AKADEMIA IT & BUSINESS WWW.SZKOLENIA.HELION.PL	ISBN 978-83-283-5693-1  9 788328 356931
INFORMATYKA W NAJLEPSZYM WYDANIU		Cena: 99,00 zł