

# e-Matematyka wspomagająca ekonomię

Krzysztof Piasecki  
Marcin Anholcer  
Krzysztof Echaust

Wydawnictwo C.H. Beck 

# e-Matematyka wspomagająca ekonomię

[Kup książkę](#)

## Autorzy:

**Krzysztof Piasecki** wprowadzenie, 1; 2; 4; 5; 6; 7.1–7.3; 7.4\*; 7.5; 8.1; 8.2; 9.2; 11\*; 12.3\*; 13.2\*; 14; 15; 17; 19.1; 19,2; 19,3\*; 22.1–22.5; 22.6\*; 23

**Marcin Anholcer** 3; 7.6; 8.3; 9.1; 10; 11\*; 20; 21

**Krzysztof Echaust** 7.4\*; 12.1; 12.2; 12.3\*; 12.4; 12.5; 13.1; 13.2\*; 13.3–13.9; 16; 18; 19,3\*; 22.6\*

\* współautorstwo

# e-Matematyka wspomagająca ekonomię

Krzysztof Piasecki  
Marcin Anholcer  
Krzysztof Echaust



WYDAWNICTWO C.H. BECK  
WARSZAWA 2013

[Kup książkę](#)

Wydawca: Dorota Ostrowska-Furmanek  
Redakcja merytoryczna: Krystyna Knap  
Recenzent: prof. dr hab. Tadeusz Trzaskalik  
Projekt okładki i stron tytułowych: Maryna Wiśniewska  
Ilustracja na okładce: ©MarkEvans/iStockphoto

Seria: Metody ilościowe

Złożono programem  $\text{\TeX}$



© Wydawnictwo C.H. Beck 2013

Wydawnictwo C.H. Beck Sp. z o.o.  
ul. Bonifraterska 17, 00-203 Warszawa

Skład i łamanie: Wydawnictwo C.H. Beck  
Druk i oprawa: Totem, Inowrocław

ISBN 978-83-255-5313-5  
 e-book 978-83-255-5314-2

[Kup książkę](#)

# Spis treści

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Przedmowa</b> . . . . .                                        | 1   |
| <b>Wprowadzenie – implementacja języka WolframAlpha</b> . . . . . | 5   |
| <b>Rozdział 1. Logika matematyczna</b> . . . . .                  | 10  |
| 1.1. Podstawy logiki . . . . .                                    | 10  |
| 1.2. Twierdzenia . . . . .                                        | 16  |
| 1.3. Reguły wnioskowania . . . . .                                | 19  |
| 1.4. Funkcje zdaniowe . . . . .                                   | 20  |
| 1.5. Równania i nierówności . . . . .                             | 25  |
| <b>Rozdział 2. Wstęp do matematyki</b> . . . . .                  | 31  |
| 2.1. Algebra zbiorów . . . . .                                    | 31  |
| 2.2. Produkt kartezjański . . . . .                               | 39  |
| 2.3. Funkcje . . . . .                                            | 41  |
| 2.4. Ciągi . . . . .                                              | 44  |
| 2.5. Tablice . . . . .                                            | 46  |
| 2.6. Algebraiczne działania wielokrotne . . . . .                 | 47  |
| 2.7. Liczebność zbiorów skończenie elementowych . . . . .         | 49  |
| 2.8. Elementy kombinatoryki . . . . .                             | 51  |
| <b>Rozdział 3. Grafy i digrafy</b> . . . . .                      | 56  |
| 3.1. Grafy . . . . .                                              | 56  |
| 3.2. Digrafy . . . . .                                            | 60  |
| 3.3. Podgrafy i spójność . . . . .                                | 63  |
| 3.4. Szczególne typy grafów i digrafów . . . . .                  | 70  |
| <b>Rozdział 4. Relacje</b> . . . . .                              | 75  |
| 4.1. Relacje – istota, określenie i formy opisu . . . . .         | 75  |
| 4.2. Własności relacji . . . . .                                  | 78  |
| 4.3. Działania na relacjach . . . . .                             | 80  |
| 4.4. Funkcja w świetle teorii relacji . . . . .                   | 83  |
| <b>Rozdział 5. Zastosowania relacji w ekonomii</b> . . . . .      | 86  |
| 5.1. Relacja równoważności . . . . .                              | 86  |
| 5.2. Relacje porządkujące . . . . .                               | 89  |
| 5.3. Optymalizacja . . . . .                                      | 93  |
| <b>Rozdział 6. Podstawy algebry liniowej</b> . . . . .            | 98  |
| 6.1. Algebra macierzy . . . . .                                   | 98  |
| 6.2. Przestrzeń wektorowa . . . . .                               | 106 |

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Rozdział 7. Instrumenty algebry liniowej</b>                            | 115 |
| 7.1. Przekształcenia elementarne macierzy                                  | 115 |
| 7.2. Rząd macierzy                                                         | 120 |
| 7.3. Macierz odwrotna                                                      | 123 |
| 7.4. Określoność macierzy symetrycznej                                     | 128 |
| 7.5. Wyznacznik                                                            | 130 |
| 7.6. Instrumentalne zastosowania wyznacznika                               | 140 |
| <b>Rozdział 8. Układy warunków liniowych</b>                               | 145 |
| 8.1. Układy równań liniowych                                               | 147 |
| 8.2. Układy nierówności liniowych                                          | 160 |
| 8.3. Zastosowania wyznacznika do rozwiązywania układów równań liniowych    | 168 |
| <b>Rozdział 9. Zastosowania algebry liniowej w ekonomii</b>                | 171 |
| 9.1. Programowanie liniowe                                                 | 171 |
| 9.1.1. Zagadnienie optymalnego asortymentu produkcji                       | 177 |
| 9.1.2. Zagadnienie diety                                                   | 178 |
| 9.1.3. Problem maksymalnego przepływu                                      | 180 |
| 9.1.4. Problem przepływu o minimalnym koszcie                              | 184 |
| 9.2. Model Leontiewa                                                       | 189 |
| <b>Rozdział 10. Zaawansowane zagadnienia algebry</b>                       | 193 |
| 10.1. Liczby zespolone                                                     | 193 |
| 10.2. Rozwiązywanie wybranych typów równań nieliniowych                    | 198 |
| 10.3. Układy równań nieliniowych                                           | 203 |
| <b>Rozdział 11. Ciągi i szeregi liczbowe</b>                               | 209 |
| 11.1. Podstawowe własności i rodzaje ciągów                                | 209 |
| 11.2. Granice ciągów                                                       | 212 |
| 11.3. Szeregi liczbowe                                                     | 221 |
| <b>Rozdział 12. Funkcja jednej zmiennej</b>                                | 225 |
| 12.1. Podstawowe pojęcia                                                   | 225 |
| 12.2. Elementarne funkcje jednej zmiennej                                  | 231 |
| 12.3. Granica funkcji                                                      | 241 |
| 12.4. Ciągłość funkcji                                                     | 246 |
| 12.5. Asymptoty funkcji                                                    | 247 |
| <b>Rozdział 13. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej</b>           | 252 |
| 13.1. Podstawy rachunku różniczkowego                                      | 252 |
| 13.2. Różniczka funkcji                                                    | 259 |
| 13.3. Reguła de l'Hospitala                                                | 262 |
| 13.4. Badanie monotoniczności funkcji                                      | 265 |
| 13.5. Badanie wypukłości funkcji                                           | 266 |
| 13.6. Poszukiwanie ekstremów lokalnych funkcji                             | 267 |
| 13.7. Poszukiwanie punktów przegięcia funkcji                              | 272 |
| 13.8. Ekstrema globalne funkcji na przedziale domkniętym                   | 273 |
| 13.9. Badanie przebiegu zmienności funkcji                                 | 275 |
| <b>Rozdział 14. Zastosowanie teorii funkcji jednej zmiennej w ekonomii</b> | 282 |
| 14.1. Podstawy rachunku marginalnego                                       | 282 |
| 14.2. Modele kosztu                                                        | 287 |
| 14.3. Zmienność cenowa popytu i podaży                                     | 289 |

|                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 14.4. Zmienność dochodowa popytu . . . . .                                           | 290        |
| 14.5. Analiza trendu . . . . .                                                       | 293        |
| <b>Rozdział 15. Elementy matematyki finansowej . . . . .</b>                         | <b>299</b> |
| 15.1. Istota i podstawowe pojęcia matematyki finansowej . . . . .                    | 299        |
| 15.2. Wartość przyszła . . . . .                                                     | 301        |
| 15.3. Wartość bieżąca . . . . .                                                      | 309        |
| 15.4. Wartość bieżąca netto . . . . .                                                | 312        |
| 15.5. Wewnętrzna stopa zwrotu . . . . .                                              | 317        |
| 15.6. Umarzanie kredytu . . . . .                                                    | 320        |
| <b>Rozdział 16. Analiza funkcji wielu zmiennych . . . . .</b>                        | <b>325</b> |
| 16.1. Funkcje wielu zmiennych – podstawowe pojęcia . . . . .                         | 325        |
| 16.2. Pojęcie granicy i ciągłości funkcji wielu zmiennych . . . . .                  | 329        |
| 16.3. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych . . . . .                         | 330        |
| 16.4. Różniczka zupełna funkcji wielu zmiennych . . . . .                            | 337        |
| 16.5. Funkcje uwikłane . . . . .                                                     | 339        |
| 16.6. Badanie monotoniczności funkcji wielu zmiennych . . . . .                      | 343        |
| 16.7. Badanie wypukłości funkcji wielu zmiennych . . . . .                           | 344        |
| 16.8. Poszukiwanie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych . . . . .             | 346        |
| 16.9. Ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych . . . . .                           | 349        |
| <b>Rozdział 17. Zastosowanie teorii funkcji wielu zmiennych w ekonomii . . . . .</b> | <b>362</b> |
| 17.1. Modele ekonomiczne dane jako funkcja wielu zmiennych . . . . .                 | 362        |
| 17.2. Rachunek marginalny . . . . .                                                  | 365        |
| 17.3. Krzywe obojętności i substytucji . . . . .                                     | 368        |
| <b>Rozdział 18. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej . . . . .</b>               | <b>373</b> |
| 18.1. Całka nieoznaczona . . . . .                                                   | 373        |
| 18.1.1. Całkowanie elementarne . . . . .                                             | 375        |
| 18.1.2. Całkowanie przez podstawienie . . . . .                                      | 375        |
| 18.1.3. Całkowanie przez części . . . . .                                            | 377        |
| 18.2. Całka oznaczona . . . . .                                                      | 379        |
| 18.3. Całki niewłaściwe . . . . .                                                    | 384        |
| 18.4. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej . . . . .                          | 389        |
| <b>Rozdział 19. Zastosowanie całek w ekonomii . . . . .</b>                          | <b>393</b> |
| 19.1. Kapitalizacja ciągła . . . . .                                                 | 393        |
| 19.2. Dyskonto procesu dochodów . . . . .                                            | 395        |
| 19.3. Nadwyżka konsumenta i producenta . . . . .                                     | 397        |
| <b>Rozdział 20. Równania różnicowe . . . . .</b>                                     | <b>401</b> |
| 20.1. Wybrane typy równań i sposoby ich rozwiązywania . . . . .                      | 401        |
| 20.1.1. Jednorodne liniowe równania różnicowe rzędu 1 . . . . .                      | 402        |
| 20.1.2. Jednorodne liniowe równania różnicowe rzędu 2 . . . . .                      | 402        |
| 20.1.3. Jednorodne liniowe równania różnicowe rzędu $k$ . . . . .                    | 404        |
| 20.2. Zagadnienie początkowe . . . . .                                               | 405        |
| 20.3. Wybrane zastosowania równań różnicowych w ekonomii . . . . .                   | 407        |
| <b>Rozdział 21. Równania różniczkowe . . . . .</b>                                   | <b>410</b> |
| 21.1. Wybrane typy równań i metody ich rozwiązywania . . . . .                       | 410        |
| 21.1.1. Równania o zmiennych rozdzielonych . . . . .                                 | 411        |
| 21.1.2. Równania o podstawieniu liniowym . . . . .                                   | 412        |

|                                                                                   |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 21.1.3. Równania jednorodne . . . . .                                             | 414        |
| 21.2. Zagadnienie początkowe . . . . .                                            | 415        |
| 21.3. Wybrane zastosowania równań różniczkowych w ekonomii . . . . .              | 416        |
| <b>Rozdział 22. Rachunek prawdopodobieństwa . . . . .</b>                         | <b>420</b> |
| 22.1. Prawdopodobieństwo – istota i ewolucja pojęcia . . . . .                    | 420        |
| 22.2. Aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa . . . . .                           | 426        |
| 22.3. Prawdopodobieństwo warunkowe – istota i pojęcie . . . . .                   | 430        |
| 22.4. Wnioskowanie bayesowskie . . . . .                                          | 432        |
| 22.5. Zmienna losowa . . . . .                                                    | 438        |
| 22.6. Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa . . . . .                               | 445        |
| 22.6.1. Rozkład dwupunktowy . . . . .                                             | 446        |
| 22.6.2. Rozkład dwumianowy . . . . .                                              | 447        |
| 22.6.3. Rozkład geometryczny . . . . .                                            | 449        |
| 22.6.4. Rozkład Poissona . . . . .                                                | 450        |
| 22.6.5. Rozkład jednostajny . . . . .                                             | 451        |
| 22.6.6. Rozkład prostokątny . . . . .                                             | 452        |
| 22.6.7. Rozkład trójkątny . . . . .                                               | 452        |
| 22.6.8. Rozkład wykładniczy . . . . .                                             | 453        |
| 22.6.9. Rozkład normalny . . . . .                                                | 455        |
| 22.6.10. Rozkład logarytmiczno-normalny . . . . .                                 | 457        |
| 22.6.11. Rozkład chi-kwadrat . . . . .                                            | 459        |
| 22.6.12. Rozkład t-Studenta . . . . .                                             | 461        |
| 22.6.13. Rozkład F Snedecora . . . . .                                            | 462        |
| 22.6.14. Rozkład Cauchy’go . . . . .                                              | 464        |
| 22.6.15. Rozkład Pareto . . . . .                                                 | 465        |
| 22.6.16. Rozkład beta . . . . .                                                   | 467        |
| <b>Rozdział 23. Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa w ekonomii . . . . .</b> | <b>470</b> |
| 23.1. Całkowanie metodą Monte Carlo . . . . .                                     | 470        |
| 23.2. Prawdopodobieństwo subiektywne . . . . .                                    | 472        |
| 23.3. Probabilistyczny model decyzyjny . . . . .                                  | 474        |
| <b>Bibliografia . . . . .</b>                                                     | <b>479</b> |
| <b>Indeks rzeczowy . . . . .</b>                                                  | <b>481</b> |

## Przedmowa

W 1994 roku ukazał się zredagowany przeze mnie podręcznik „Matematyka wspomagająca zarządzanie”. Tytuł tej książki nawiązywał do głoszonej przez autorów tezy, że matematyka co prawda jest jedna, ale każdy z kierunków studiów ekonomicznych wymaga odrębnego wyboru nauczanych treści matematycznych. My nasz podręcznik dedykowaliśmy studentom kierunków studiów związanych z dyscypliną zarządzanie.

Podręcznik ten do tej pory towarzyszył wykładom z matematyki przedstawianym początkowo jedynie studentom kierunku studiów zarządzanie. Stopniowo grono jego użytkowników poszerzyło się o słuchaczy kierunków studiów związanych z dyscyplinami ekonomia i finanse. Dzięki temu mogło się do tej pory ukazać sześć wydań tego podręcznika: dwa w prywatnym wydawnictwie Akademii i cztery w Wydawnictwie AE/UE w Poznaniu.

Poszerzenie merytorycznego profilu osób korzystających z tego podręcznika skutkowało między innymi tym, że dawał się odczuć brak tych działów matematyki, które powinni znać przyszli ekonomiści i finansiści. Ta niedogodność zachęciła do przygotowania nowego, bardziej uniwersalnego podręcznika do nauki matematyki. Prezentowany podręcznik jest dedykowany studentom kierunków ogólnoeconomicznych, finansowych i zarządczych.

Z pełną premedytacją podręcznika tego nie adresujemy do studentów kierunków studiów typu „Informatyka i ekonometria”. Specyfika kształcenia na tych kierunkach wymusza podniesienie złożoności matematycznej przekazywanych treści nauczania do poziomu trudnego do zaakceptowania przez studentów pozostałych kierunków ekonomicznych. Tak wysokie wymagania należy stawiać jedynie przed przyszłymi twórcami narzędzi formalnych stosowanych w ekonomii. Tym, którzy te narzędzia będą jedynie stosowali, wystarczy mniejszy zasób wiedzy matematycznej.

Z oczywistych względów książki tej nie adresujemy też do studentów towaroznawstwa. Ten kierunek studiów wymaga całkowicie odmiennej wiedzy matematycznej nawiązującej do przyrodoznawstwa.

Do rąk czytelników oddajemy książkę obszerną. Ta objętość wynika z zamiaru równoczesnego umieszczenia w niej treści odpowiadających odmiennym potrzebom poszczególnych kierunków studiów. Książka jest podręcznikiem adresowanym głównie do studentów studiów licencjackich kierunków związanych z dyscyplinami: ekonomia, zarządzanie i finanse. Część prezentowanych tre-

ści jest, zdaniem autorów, wspólna dla wszystkich wymienionych kierunków. Dodatkowo uwzględniono treści unikatowe dla poszczególnych kierunków. Wielokrotnie stawiamy też do wyboru rodzaj instrumentów formalnych służących do rozwiązania postawionych zagadnień. W oparciu o zaprezentowane tutaj treści można przygotować wiele różnych programów nauczania. Zadanie to pozostawiamy poszczególnym wykładowcom. Wszystko to powiększa grono odbiorców, do których jest adresowana książka.

Głównym założeniem książki jest prezentacja matematyki jako języka opisu zagadnień ekonomicznych, zarządczych i finansowych. W tym celu wykład został pomyślany jako nierozzerwalny spłot dwóch wątków. Pierwszy z nich jest poświęcony instrumentarium matematycznemu i porządkuje równocześnie sekwencje rozdziałów zgrupowanych wokół wybranych teorii matematycznych. Obszerny wątek aplikacyjny został wprowadzony w przekonaniu, że taka forma prezentacji instrumentarium matematycznego stanowi warunek konieczny dla pozytywnej percepcji proponowanych metod matematycznych. Omówienie możliwości zastosowań matematyki w ekonomii dostosowano do poziomu erudycji ekonomicznej studentów pierwszego roku. Identyczne idee przyświecały autorom podręcznika „Matematyka wspomagająca zarządzanie”. Dla podkreślenia faktu kontynuacji tej idei, tytuł prezentowanej książki w oczywisty sposób nawiązuje do tytułu tamtego podręcznika.

Prezentowana książka nie jest jedynie prostym poszerzeniem treści nauczania. Na jej kształcie odcisnął swój znak także czas niosący w minionym dwudziestolecu wielkie zmiany.

Od paru lat obserwujemy wyraźną zmianę profilu wykształcenia absolwentów szkół średnich. Autorzy nie mieli tutaj wyboru i musieli dostosować się do tych zmian. Dostrzec jednak można pewne pozytywne efekty zmiany profilu wykształcenia kandydatów na studia, gdyż dzięki tym zmianom nie musimy już przełamywać pewnych nawyków wynoszonych przez studentów ze szkoły średniej. Autorzy skwapliwie z tej możliwości skorzystali.

Drugą ważną zmianą jest postępująca szybko informatyzacja naszego dnia powszedniego. Proces ten wymaga także zmiany środków i celów kształcenia matematycznego. I bynajmniej nie chodzi tutaj wcale o e-dydaktykę<sup>1</sup>.

Wszyscy przywykliśmy już do poszukiwania potrzebnej wiedzy w Internecie. Robimy to także w odniesieniu do wiedzy matematycznej. Będzie to łatwiejsze, jeśli nasi studenci będą władać międzynarodowym językiem matematycznym. Stąd cały podręcznik został napisany w języku formalnym, stosowanym przez ogół korzystających z matematyki mieszkańców naszej planety. Dzięki temu treści zawarte w książce mogą być bezpośrednio rozszerzone o treści zawarte na platformach internetowych (np. Wikipedia).

Postępująca informatyzacja dostarcza nam wszystkim łatwo dostępnych narzędzi informatycznych. W chwili obecnej dużym ułatwieniem w stosowaniu

---

<sup>1</sup> ang. *e-learning*

matematyki jest możliwość posługiwania się właściwym oprogramowaniem matematycznym. Nasza książka jest adresowana do takich studentów i absolwentów, którzy matematykę w ekonomii stosują jedynie sporadycznie. W tej sytuacji istotnym ograniczeniem możliwości wykorzystania tutaj wyspecjalizowanych programów komputerowych jest wysoka cena wielu z nich. W praktyce możliwości stosowania programów komputerowych ograniczają się do korzystania z arkusza kalkulacyjnego EXCEL i otwartych portali typu „knowledge engine”. W tej sytuacji wszystkie treści matematyczne prezentowane w tej książce zostały zilustrowane możliwościami zastosowania arkusza EXCEL i portalu WolframAlpha do rozwiązywania postawionych tam problemów. Portal WolframAlpha dostępny jest nawet na ekranach smartfonów. W książce przedstawiony jest język linearny matematyki pozwalający opisać problem matematyczny jedynie przy zastosowaniu klawiatury QWERTY telefonu komórkowego.

Informatyzacja obliczeń w praktyczny sposób zniósła wszystkie utrudnienia związane z wysoką złożonością analityczną i obliczeniową zadań matematyki. Poprawne skorzystanie z tych możliwości wymaga jednak opanowania innych umiejętności formalnych przedstawionych w podręczniku. W dydaktyce matematyki należy przenieść nacisk z kształtowania kompetencji „wykonywanie skomplikowanych obliczeń” na rzecz kształtowania kompetencji „zarządzanie skomplikowanymi obliczeniami”. Nie ma większego zagrożenia dla poprawnych zastosowań matematyki, niż nieznająca matematyki osoba wykonująca biegle obliczenia. Doświadczenie podpowiada, że nigdy w takim wypadku nie wiadomo, czy poprawnie został zidentyfikowany model matematyczny służący rozwiązaniu postawionego zadania i czy biegle przeprowadzone obliczenia odpowiadają wybranemu modelowi matematycznemu. Stąd w proponowanym podręczniku kształtowanie umiejętności kalkulacyjnych zostało ograniczone do przypadków prostych zadań, których rozwiązanie przybliży i pozwoli zrozumieć istotę problemu matematycznego. Pozostałe, bardziej skomplikowane obliczenia możemy już ze zrozumieniem wykonać na ekranach naszych urządzeń. Dlatego tytuł książki sygnalizuje, że rzecz będzie o e-matematyce.

Wspomniana już łatwość wykonywania obliczeń rodzi potrzebę poprawnego zarządzania tymi obliczeniami. Z tej przyczyny duży nacisk w książce położono na:

- doskonalenie umiejętności precyzyjnego formułowania i rozwiązywania problemów;
- podstawowe reguły wnioskowania normatywnego i wnioskowania bayesowskiego;
- wnioskowanie dedukcyjne.

Realizacja tych wszystkich celów dydaktycznych jest zorientowana na kształtowanie u studentów dwóch głównych kompetencji:

- biegłego stosowania matematyki do rozwiązywania wszystkich zadań stawianych na innych przedmiotach z zakresu szeroko rozumianej ekonomii ilościowej;

- w trakcie pracy zespołowej zdolności komunikowania się z ekspertem stosującym do rozwiązania postawionego problemu narzędzia matematyczne.

Zaproponowana formuła e-matematyki jest próbą sprostania wyzwaniom stawianym przez zmieniające się otoczenie. Mnie udało się do tej pory przejść szlak od liczydła w szkole podstawowej poprzez suwak logarytmiczny i kręciołek<sup>2</sup> na studiach aż do smartfona dzisiaj. Idąc tą drogą, zauważyłem jedno:

*Kolejne ułatwienia w stosowaniu matematyki wymagają coraz większej jej znajomości.*

Opublikowanie książki nie jest możliwe bez zaufania okazanego przez wydawcę. Pani redaktor Dorocie Ostrowskiej-Furmanek dziękuję za okazane zaufanie. Książkę oddaję w Państwa ręce

*Maryneta Piasecki*

Bnin, 24.03.2013

---

<sup>2</sup> Kalkulator mechaniczny z napędem ręcznym

## Wprowadzenie – implementacja języka WolframAlpha

Każdą spójną logicznie metodę zapisu problemów matematycznych w jednym wierszu nazywamy językiem linearnym matematyki. Portal WolframAlpha jest przykładem cybernetycznego poliglota, gdyż można się z nim kontaktować we wszystkich powszechnie znanych językach linearnych matematyki. Każdy z tych języków dokonuje interpretacji w sposób określony przez jego reguły interpretacyjne zgodne z uniwersalnymi regułami matematyki. Portal WolframAlpha jest bardzo tolerancyjny, gdyż dopuszcza komunikaty zapisane w języku łamanym, składającym się ze słów pochodzących z różnych języków linearnych. Przy interpretacji takich poleceń kieruje się własnym zestawem reguł interpretacyjnych i czasami zgłasza gotowość rozwiązania zadania innego niż zadania rozwiązywane przez osobę użytkującą ten portal. Jedynym sposobem ominięcia tych trudności jest posługiwanie się językiem o sprawdzonych interpretacjach. Przyswojenie takiego języka przebiega normalną drogą i zawsze zaczyna się od posługiwania się prostym językiem składającym się z niewielu słów. Później, w miarę podnoszenia swoich kwalifikacji matematycznych i językowych, każdy użytkownik WolframAlpha może ten język wzbogacać o dalsze słowa i zwroty. Taka jest naturalna kolej rzeczy przy nauce każdego języka.

Poniżej została przedstawiona propozycja takiego języka. Jest to język w swej składni nawiązujący do języka stosowanego w programie Mathematica<sup>®</sup>. Wybór ten jest uzasadniony przypuszczeniem, że kolejnym etapem po korzystaniu z portalu WolframAlpha jest stosowanie programu Mathematica<sup>®</sup>. Tak też przypuszcza właściciel portalu WolframAlpha będący równocześnie producentem programu Mathematica<sup>®</sup>.

Ewolucja stosowanego języka rozpoczyna się na ogół od prostych modyfikacji. Wprowadzając te modyfikacje, trzeba pamiętać między innymi, że:

W zaproponowanym języku zastępowanie dużych liter przez małe w ogólnym przypadku jest niedopuszczalne.

W ułamku dziesiętnym część całkowitą od części ułamkowej oddziela kropka.

Z drugiej strony, w pełni dopuszczalne jest zastosowanie następującej modyfikacji.

Nawiasy kwadratowe [ ] zawsze mogą zostać zastąpione przez okrągłe ( ) i odwrotnie.

Symbole określające poszczególne działania arytmetyczne na dowolnych liczbach zostały przedstawione w tabeli W.1. W arytmetyce rozpowszechniony jest zwyczaj pomijania znaku mnożenia pomiędzy mnożonymi zmiennymi. Kulturowanie tego zwyczaju w przypadku portalu WolframAlpha prowadzi czasami do trudności z identyfikacją zapisu działań arytmetycznych. Wynika stąd kolejne ograniczenie dla zaproponowanego języka.

Nigdy nie pomijamy znaku mnożenia \*.

W przypadku stosowania dowolnego języka linearnego obowiązują wspólne reguły arytmetyki liczb. Określają one w jednoznaczny sposób kolejność działań arytmetycznych.

**Kolejność wykonywania działań arytmetycznych:**

- 1) obliczanie wartości funkcji,
- 2) działania w nawiasach,
- 3) podnoszenie do potęgi,
- 4) mnożenia i dzielenia jako działania równorzędne,
- 5) dodawania i odejmowania jako działania równorzędne.

W przypadku wielokrotnych działań równoważnych opisanych w punktach 3) i 4) wykonuje je się w kolejności od lewej do prawej. Kolejność ta ma istotne znaczenie w przypadku, kiedy pojawiają się dzielenia.

W przypadku wielokrotnego potęgowania potęgujemy w kolejności od prawej do lewej.

**Przykład W.1.** Poniższe polecenia wykonujemy w następujący sposób:

$$(\cos [\pi] + 3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$(\cos \pi + 3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = (-1 + 3)^2 + 6 \cdot 4 = 2^2 + 24 = 4 + 24 = 28,$$

$$2^{3^4}$$

$$2^{3^4} = 2^{81} = 2417851639229258349412352,$$

$$10/5*2$$

$$10 : 5 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4.$$

□

W poniższej tabeli przedstawiono wszystkie te symbole i polecenia, które znajdują zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów matematycznych opisanych w tej książce. W pewnych sytuacjach, ze względu na złożoność opisu, musieliśmy się jedynie odwołać do odpowiednich stron podręcznika. Każde polecenie zapisujemy w linii poleceń przedstawionych na rysunku W.1 i zatwierdzamy poprzez naciśnięcie przycisku .



Rysunek W.1.

Tabela W.1.

| Znaczenie                     | Symbol/komenda                      | Przykład                                       | Interpretacja przykładu                                                                       |
|-------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| alternatywa                   | <code>  </code>                     | <code>p  q</code>                              | $p \vee q$                                                                                    |
| asymptoty                     | <code>Asymptotes[F[x]]</code>       | <code>Asymptotes[1/x]</code>                   |                                                                                               |
| arcus tangens                 | <code>Atan[x]</code>                | <code>Atan[1]</code>                           | $\arctg 1$                                                                                    |
| całka nieoznaczona            | <code>int F[x]dx</code>             | <code>int (2x+x^(1/2))/x^2dx</code>            | $\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2} dx$                                                             |
| całka oznaczona               | <code>int F[x]dx from a to b</code> | <code>int x^2*Log[x]dx from 1 to E</code>      | $\int_1^e x^2 \ln x dx$                                                                       |
| cosinus                       | <code>Cos[x]</code>                 | <code>Cos[Pi/2]</code>                         | $\cos \frac{\pi}{2}$                                                                          |
| cotangens                     | <code>Cot[x]</code>                 | <code>Cot[Pi/3]</code>                         | $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$                                                            |
| digraf                        | str. 60                             |                                                |                                                                                               |
| dodawanie liczb               | <code>+</code>                      | <code>a+b</code>                               | $a + b$                                                                                       |
| dodawanie macierzy            | <code>+</code>                      | <code>({1,2},{3,4})+({5,6},{7,8})</code>       | $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ |
| druga pochodna                | <code>D[D[F[x],x],x]</code>         | <code>D[D[x^2+5*x,x],x]</code>                 | $(x^2 + 5 \cdot x)''$                                                                         |
| druga pochodna                | <code>(F[x])''</code>               | <code>(x^2+5*x)''</code>                       | $(x^2 + 5 \cdot x)''$                                                                         |
| druga pochodna w punkcie      | <code>D[D[F[x],x],x] for x=a</code> | <code>D[D[F[x],x],x] for x=3</code>            | $F''(3)$                                                                                      |
| diedzina funkcji              | <code>Domain[F[x] ]</code>          | <code>Domain[Sqrt[x]]</code>                   |                                                                                               |
| dzielenie liczb               | <code>/</code>                      | <code>a/b</code>                               | $a : b$                                                                                       |
| funkcja wykładnicza           | <code>Exp[x]</code>                 | <code>Exp[4]</code>                            | $e^4$                                                                                         |
| graf                          | str. 56                             |                                                |                                                                                               |
| granica                       | <code>limF[x],x-&gt;c</code>        | <code>limx^2,x-&gt;3</code>                    | $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$                                                                  |
| granica lewostronna           | <code>limF[x],x-&gt;c-</code>       | <code>limx^2,x-&gt;3-</code>                   | $\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2$                                                                |
| granica lewostronna           | <code>limF[x],x-&gt;Inf</code>      | <code>limx^2,x-&gt;Inf</code>                  | $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$                                                             |
| granica prawostronna          | <code>limF[x],x-&gt;c+</code>       | <code>limx^2,x-&gt;3+</code>                   | $\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2$                                                                |
| granica prawostronna          | <code>limF[x],x-&gt;-Inf</code>     | <code>limx^2,x-&gt;-Inf</code>                 | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$                                                            |
| Iloczyn skalarny <sup>1</sup> | <code>*</code>                      | <code>(1,2)*(2,4)</code>                       | $(1;2) \circ (3;4)$                                                                           |
| implikacja                    | <code>=&gt;</code>                  | <code>p=&gt;q</code>                           | $p \implies q$                                                                                |
| koniunkcja                    | <code>&amp;&amp;</code>             | <code>p&amp;&amp;q</code>                      | $p \wedge q$                                                                                  |
| liczba Neppera                | <code>E</code>                      |                                                | $e$                                                                                           |
| liczba pi                     | <code>Pi</code>                     |                                                | $\pi$                                                                                         |
| liniowa niezależność          | <code>Linearindependence[ ]</code>  | <code>Linearindependence [(1,2), (3,4)]</code> |                                                                                               |
| logarytm naturalny            | <code>Log[x]</code>                 | <code>Log[12]</code>                           | $\ln 12$                                                                                      |

<sup>1</sup> Miałem to szczęście, że matematyki nauczyli mnie lwowscy profesorowie. Tłumaczyli nam zawsze, że właściwym dla języka polskiego jest słowo „skalarowy”.

|                                  |                                                   |                                           |                                                                                                   |
|----------------------------------|---------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| logarytm z dowolną podstawą      | <code>Log[a,x]</code>                             | <code>Log[2,12]</code>                    | $\log_2 12$                                                                                       |
| macierz                          | str. 101                                          | $(\{1,2,3\},\{4,5,6\})$                   | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$                                            |
| macierz jednostkowa              | <code>IdentityMatrix[n]</code>                    | <code>IdentityMatrix[2]</code>            | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                                                    |
| macierz odwrotna                 | <code>Inverse[A]</code>                           | <code>Inverse({1,2},{3,4})</code>         | $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$                                               |
| macierz transponowana            | <code>Transpose[A]</code>                         | <code>Transpose[({1,2,3},{4,5,6})]</code> | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T$                                          |
| maksimum globalne                | <code>Max F[x] from a to b</code>                 | <code>Max x^2 from 1 to 2</code>          | $\max_{1 \leq x \leq 2} x^2$                                                                      |
| metoda eliminacji Gaussa-Jordana | <code>Rowreduce[A]</code>                         | <code>Rowreduce[({1,2,3},{4,5,6})]</code> |                                                                                                   |
| miejsca zerowe funkcji           | <code>Roots[F[x]]</code>                          | <code>Roots[Sqrt[x]]</code>               |                                                                                                   |
| minimum globalne                 | <code>Min F[x] from a to b</code>                 | <code>Min x^2 from 1 to 2</code>          | $\min_{1 \leq x \leq 2} x^2$                                                                      |
| „mniejsze niż”                   | <code>&lt;</code>                                 | <code>a&lt;b</code>                       | $a < b$                                                                                           |
| „mniejsze równe niż”             | <code>&lt;=</code>                                | <code>a&lt;=b</code>                      | $a \leq b$                                                                                        |
| mnożenie liczb                   | <code>*</code>                                    | <code>a*b</code>                          | $a \cdot b$                                                                                       |
| mnożenie macierzy                | <code>*</code>                                    | $(\{1,2\},\{3,4\}) * (\{5,6\},\{7,8\})$   | $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ |
| mnożenie macierzy przez liczbę   | str. 102                                          | $2 * (\{1,2,3\},\{4,5,6\})$               | $2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$                                    |
| negacja                          | <code>!</code>                                    | <code>!p</code>                           | $\neg p$                                                                                          |
| nieskończoność                   | <code>Inf</code>                                  |                                           | $\infty$                                                                                          |
| odejmowanie liczb                | <code>-</code>                                    | <code>a-b</code>                          | $a - b$                                                                                           |
| pierwiastek kwadratowy           | <code>Sqrt[x]</code>                              | <code>Sqrt[x+6]</code>                    | $\sqrt{x+6}$                                                                                      |
| pochodna                         | <code>D[F[x],x]</code>                            | <code>D[x^2+5*x],x]</code>                | $(x^2 + 5 \cdot x)'$                                                                              |
| pochodna                         | <code>(F[x])'</code>                              | <code>(x^2+5*x)'</code>                   | $(x^2 + 5 \cdot x)'$                                                                              |
| pochodna cząstkowa               | <code>D[F[x,...,z],x]</code>                      | <code>D[x*z*y, x]</code>                  | $\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y \cdot z)$                                                  |
| pochodna cząstkowa II rzędu      | <code>D[D[F[x,...,z],x],y]</code>                 | <code>D[D[x*z*y, x],z]</code>             | $\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(x \cdot y \cdot z)$                                     |
| pochodna w punkcie               | <code>D[F[x],x] for x=a</code>                    | <code>D[F[x],x] for x=3</code>            | $F'(3)$                                                                                           |
| pole pomiędzy krzywymi           | <code>area between y=F[x],y=G[x],...y=H[x]</code> | <code>area between y=2*x,y=x^2</code>     |                                                                                                   |

|                             |                                                   |                                                   |                                                                    |
|-----------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| potęgowanie liczb           | $\wedge$                                          | $a^b$                                             | $a^b$                                                              |
| „równa się”                 | $=$                                               | $a=b$                                             | $a = b$                                                            |
| równoważność                | $\leq \Rightarrow$                                | $p \leq \Rightarrow q$                            | $p \iff q$                                                         |
| „różne”                     | $\neq$                                            | $a \neq b$                                        | $a \neq b$                                                         |
| rzęd macierzy               | $\text{Rank}[A]$                                  | $\text{Rank}[\{ \{1,2,3\}, \{4,5,6\} \}]$         |                                                                    |
| silnia                      | $\text{Fact}[n]$                                  | $\text{Fact}[5]$                                  | $5!$                                                               |
| sinus                       | $\text{Sin}[x]$                                   | $\text{Sin}[\text{Pi}/2]$                         | $\sin \frac{\pi}{2}$                                               |
| szereg                      | $\text{Sum}[a(n), \{n,m\}]$                       | $\text{Sum}[n^2, \{n,5\}]$                        | $\sum_{n=1}^5 n^2$                                                 |
| symbol Newtona              | $\text{Bin}[n,k]$                                 | $\text{Bin}[10,2]$                                | $\binom{10}{2}$                                                    |
| tangens                     | $\text{Tan}[x]$                                   | $\text{Tan}[\text{Pi}/4]$                         | $\text{tg} \frac{\pi}{4}$                                          |
| tautologia                  | $\text{TautologyQ}[\ ]$                           | $\text{TautologyQ}[p \Rightarrow !p]$             | str. 13                                                            |
| wartość bezwzględna         | $\text{Abs}[x]$                                   | $\text{Abs}[x]$                                   | $ x $                                                              |
| wartość bieżąca             | present value                                     | str. 309                                          |                                                                    |
| wartość bieżąca netto       | net present value                                 | str. 312                                          |                                                                    |
| wartość funkcji             | $F[x]$                                            | $\text{Sin}[x]$                                   | $\sin x$                                                           |
| wartość przyszła            | future value                                      | str.301                                           |                                                                    |
| wektor                      | str. 106                                          | $(1,2,3)$                                         | $(1,2,3)^T$                                                        |
| wewnętrzna stopa zwrotu     | internal rate of return                           | str. 317                                          |                                                                    |
| „większe niż”               | $>$                                               | $a > b$                                           | $a > b$                                                            |
| „większe równe niż”         | $\geq$                                            | $a \geq b$                                        | $a \geq b$                                                         |
| wykres funkcji              | $\text{Plot } F[x]$                               | $\text{Plot } x^3$                                |                                                                    |
| wykres funkcji w przedziale | $\text{Plot } F[x] \text{ from } a \text{ to } b$ | $\text{Plot } x^3 \text{ from } -1 \text{ to } 2$ |                                                                    |
| wyraz ciągu                 | $a(n)$                                            | $a(12)$                                           | $a_{12}$                                                           |
| wyznacznik macierzy         | $\text{Det}[A]$                                   | $\text{Det}(\{1,2\}, \{3,4\})$                    | $\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$ |
| zbiór wartości funkcji      | $\text{Range}[F[x]]$                              | $\text{Range}[\text{Sqrt}[x]]$                    |                                                                    |

Dalszych inspiracji do doskonalenia zaproponowanego języka należy szukać przede wszystkim w podręcznikach programu Mathematica®.

# Rozdział 1. Logika matematyczna

## 1.1. Podstawy logiki

**Stwierdzeniem** w logice nazywamy dowolne zdanie twierdzące opisujące właściwości dowolnych, zdefiniowanych uprzednio, obiektów. Wynika z tego, że żadna definicja nie jest stwierdzeniem. Szczególnym przypadkiem stwierdzeń są stwierdzenia porównujące liczby i zmienne. Stwierdzenia te nazywamy porównaniami ilościowymi. Najczęściej stosowane porównania ilościowe zostały przedstawione w tabeli 1.1. Tam też przedstawiono implementację WOLFRAM i implementację EXCEL tych porównań. Implementacje kolejnych istotnych z punktu widzenia matematyki stwierdzeń będą podane tam, gdzie te stwierdzenia zostaną opisane.

**Tabela 1.1.** Porównania ilościowe i ich implementacje programowe

| Porównanie | Objaśnienie                           | WOLFRAM | EXCEL  |
|------------|---------------------------------------|---------|--------|
| $a = b$    | <b>a</b> jest równe <b>b</b>          | $a==b$  | $a=b$  |
| $a \neq b$ | <b>a</b> jest różne od <b>b</b>       | $a!=b$  | $a<>b$ |
| $a > b$    | <b>a</b> jest większe od <b>b</b>     | $a>b$   | $a>b$  |
| $a \geq b$ | <b>a</b> jest większe równe <b>b</b>  | $a>=b$  | $a>=b$ |
| $a < b$    | <b>a</b> jest mniejsze od <b>b</b>    | $a<b$   | $a<b$  |
| $a \leq b$ | <b>a</b> jest mniejsze równe <b>b</b> | $a<=b$  | $a<=b$ |

**Przykład 1.1.** W tabeli 1.2 przedstawiono przykłady stwierdzeń. W przypadku porównań ilościowych opisano tam także implementację. □

**Zdaniem** w logice nazywamy każde stwierdzenie, o którym można orzec, czy jest prawdziwe, czy też fałszywe. Sposób rozstrzygnięcia o prawdziwości lub fałszywości zdania stanowi przedmiot rozważań filozofii. Pośród wyrażań języka potocznego zdaniami mogą być jedynie zdania oznajmujące (np.: „Jan lubi banany”, „Warszawa jest stolicą Islandii”). Nie są zdaniami pytania, polecenia, prośby czy też wyrażenia ustalające pewne normy (np.: „Należy jeść banany”). Zdaniami nie są też prognozy (np.: „Jutro będzie padał deszcz”) oraz definicje (np.: „Tydzień kalendarzowy to kolejne dni od poniedziałku do niedzieli”).

**Tabela 1.2.** Przykłady stwierdzeń i ich implementacje

| Pozycja | Stwierdzenie                   | WOLFRAM               | EXCEL                     |
|---------|--------------------------------|-----------------------|---------------------------|
| a)      | $3 = 4$                        | <code>3==4</code>     | <code>3=4</code>          |
| b)      | $x + 3 \neq 5$                 | <code>x+3!=5</code>   | <code>x+3&lt;&gt;5</code> |
| c)      | $2 + 5 > 4$                    | <code>2+5&gt;4</code> | <code>2+5&gt;4</code>     |
| d)      | $6 \geq 10$                    | <code>6&gt;=10</code> | <code>6&gt;=10</code>     |
| e)      | $3 \in \{1; 2; 3; 4\}$         |                       |                           |
| f)      | Warszawa jest stolicą Islandii |                       |                           |

Każdemu ze zdań prawdziwych przypisujemy wartość logiczną **PRAWDA**. Każdemu ze zdań fałszywych przypisujemy wartość logiczną **FAŁSZ**. W dalszych rozważaniach wartość **PRAWDA** oznaczać będziemy za pomocą symbolu **T**, a wartość **FAŁSZ** za pomocą symbolu **F**.

W wielu polskich podręcznikach matematyki wartość **PRAWDA** jest oznaczana za pomocą symbolu **1**, a wartość **FAŁSZ** za pomocą symbolu **0**. Jest to podejście różniące się od wspólnych międzynarodowych standardów dydaktycznych.

**Tabela 1.3.** Implementacja programowa wartości logicznych

| Wartość logiczna | Logika   | WOLFRAM | EXCEL * |
|------------------|----------|---------|---------|
| <b>PRAWDA</b>    | <b>T</b> | True    | PRAWDA  |
| <b>FAŁSZ</b>     | <b>F</b> | False   | FAŁSZ   |

\*W arkuszu EXCEL wartość logiczną wybranych zdań można ustalić, stosując podstawienie `=P`, gdzie symbol P oznacza oceniane zdanie.

**Przykład 1.2.** Stwierdzenie b) z przykładu 1.1 nie jest zdaniem. Pozostałe stwierdzenia są zdaniami. Zdania a), d) i f) są fałszywe, a więc przypisujemy im wartość logiczną **F**. Zdania c) i e) są zdaniami prawdziwymi, a więc przypisujemy im wartość logiczną **T**. W arkuszu kalkulacyjnym EXCEL wartość logiczną trzech pierwszych zdań można ustalić, stosując odpowiednio podstawienia:

$$=3=4$$

$$=2+5>4$$

$$=6>=10.$$

□

W logice podstawą do rozważań są zdania proste mające określoną wartość logiczną. W logice matematycznej poszczególne zdania proste oznaczać będziemy małymi literami, np.:  $p, q, r, s$  itp. Poszczególne zdania proste mogą być przekształcone lub połączone za pomocą spójników logicznych. Sposób tego przekształcenia może zostać opisany przy użyciu definicji właściwej lub definicji F–T. Uzyskane w ten sposób zdania nazywamy zdaniami złożonymi. Definicje F–T są jedynie równoważnym formalnym zapisem właściwej definicji. Definicje F–T zostały podane w tabeli 1.4.