

Spis treści

KLIKNIJ NA INTERESUJĄCY CIĘ TEMAT

1. Podstawowe wiadomości	5
1.1. Równania i nierówności wielomianowe / 5	
1.1.1. Równania kwadratowe / 7	
1.1.2. Nierówności kwadratowe / 9	
1.1.3. Równania wielomianowe / 14	
1.1.4. Nierówności wielomianowe / 16	
1.1.5. Pierwiastkowanie równań i nierówności / 19	
1.2. Równania i nierówności wymierne / 25	
1.2.1. Równania wymierne / 25	
1.2.2. Nierówności wymierne / 28	
1.3. Wartość bezwzględna – definicja, równania i nierówności / 33	
1.4. Potęgowanie / 37	
1.5. Równania i nierówności wykładnicze / 41	
1.6. Równania i nierówności logarytmiczne / 44	
1.7. Trygonometria / 48	
2. Przegląd ważniejszych funkcji	49
2.1. Funkcje $\exp$ i $\ln x$ / 49	
2.2. Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne / 50	
3. Funkcja jednej zmiennej	55
3.1. Określanie dziedziny / 55	
3.2. Pochodna funkcji / 58	
3.3. Granica funkcji i reguła de l'Hospitala / 67	
3.4. Asymptoty funkcji / 71	
3.5. Monotoniczność i ekstremum funkcji / 76	
3.6. Wklęsłość, wypukłość i punkty przegięcia funkcji / 88	
4. Rachunek całkowy	92
4.1. Całka nieoznaczona / 92	
4.1.1. Całki obliczane przez sprowadzanie do wzorów podstawowych / 93	
4.1.2. Całkowanie przez podstawienie / 97	
4.1.3. Całkowanie przez części / 108	
4.2. Całka oznaczona / 116	
4.2.1. Całka oznaczona właściwa / 116	
4.2.2. Całki niewłaściwe / 117	
5. Rachunek prawdopodobieństwa	123
5.1. Zmienna losowa skokowa / 123	
5.2. Zmienna losowa ciągła / 128	

6. Algebra macierzy	136
6.1. Wiadomości podstawowe / 136	
6.2. Wyznacznik macierzy / 140	
6.3. Rząd macierzy / 145	
6.4. Macierz odwrotna / 150	
7. Forma kwadratowa	154
8. Funkcja wielu zmiennych	157
8.1. Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych / 157	
8.4. Ekstremum funkcji wielu zmiennych / 162	
9. Elementy matematyki finansowej 170	
9.1. Procent prosty i składany / 170	
9.2. Roczna efektywna stopa procentowa / 179	
9.3. Strumień pieniędzy / 181	
9.4. Kapitalizacja ciągła / 189	
Odpowiedzi do zadań	190

Drodzy Studenci i Wykładowcy!

Z przyjemnością obwieszczamy koniec ze skomplikowanym obliczem przedmiotu, jakim jest zastosowanie matematyki w ekonomii, bowiem oferta rynkowa została uzupełniona wyjątkowym skryptem o charakterze typowo ćwiczeniowym.

W skrypcie skupiono się na samym procesie rozwiązywania zadań, ograniczając wykład teoretyczny do niezbędnego minimum. Zamieszczony na początku materiał powtórzeniowy powoduje, że czytelnik z łatwością przejdzie do dalszych rozdziałów, w pełni rozumiejąc omawiane zagadnienia.

Autor jest wybitnym absolwentem Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, uhonorowanym wyróżnieniem Ministra Gospodarki. Posiada kilkuletnie doświadczenie w pracy edukacyjnej ze studentami uczelni ekonomicznych i technicznych. Dzięki temu zna ewentualne pytania i wątpliwości i od razu je rozjaśnia.

Jest to idealna pozycja dla studentów, którzy obawiają się kłopotów z opanowaniem trudnego materiału z matematyki i jednocześnie pragną samodzielnie rozwiązać pojawiające się problemy. Również wykorzystanie tego skryptu na ćwiczeniach będzie z pewnością strzałem w dziesiątkę.

Wydawca

1. Podstawowe wiadomości

Rozpoczynając kurs matematyki na wyższej uczelni, należy mieć dobrze ugruntowaną wiedzę z zakresu szkoły średniej. W tym rozdziale przypomnimy podstawowe wiadomości, których nieznajomość zawsze będzie prowadzić do kłopotów z zaliczeniem matematyki.

1.1. Równania i nierówności wielomianowe

Zanim przystąpimy do rozwiązywania równań i nierówności, konieczne jest przypomnienie wzorów skróconego mnożenia i funkcji kwadratowej.

Wzory skróconego mnożenia:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

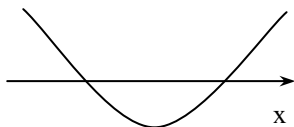
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Funkcja kwadratowa:

$$y = ax^2 + bx + c$$

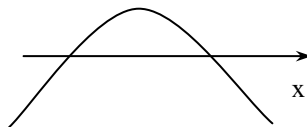
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola, której położenie zależy od znaku współczynnika a . Możliwe są dwa przypadki:

$$a > 0$$



parabola zwrócona ramionami do góry

$$a < 0$$



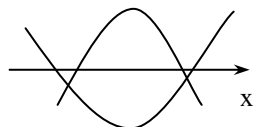
parabola zwrócona ramionami w dół

Nie rozpatrujemy przypadku $a = 0$, ponieważ nie mamy wtedy do czynienia z funkcją kwadratową.

Kolejną istotną kwestią są miejsca zerowe paraboli. Ich istnienie zależy od znaku wyróżnika paraboli Δ . I tak:

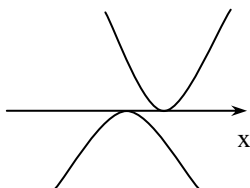
$$\Delta > 0$$

2 miejsca zerowe



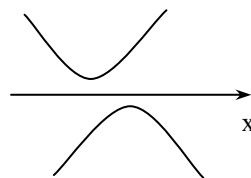
$$\Delta = 0$$

1 miejsce zerowe



$$\Delta < 0$$

brak miejsc zerowych



Na każdym rysunku znajdują się odpowiednio dwie parabole w zależności od znaku współczynnika kierunkowego.

Przypomnimy teraz podstawowe wzory dotyczące funkcji kwadratowej.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Pierwiastki:

- gdy $\Delta > 0$, istnieją dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- gdy $\Delta = 0$, istnieje jeden pierwiastek podwójny:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Funkcję kwadratową $ax^2 + bx + c$ można zapisać też w innych postaciach:

Postać iloczynowa:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) ,$$

gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego.

Postać ta wygląda inaczej, gdy istnieje tylko pierwiastek podwójny:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Postać kanoniczna:

$$ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q ,$$

gdzie $(p; q)$ to współrzędne wierzchołka paraboli.

Wynoszą one:

$$p = -\frac{b}{2a}; q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Stąd po podstawieniu otrzymujemy:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Po tym krótkim przypomnieniu możemy przystąpić do rozwiązywania równań i nierówności.

1.1.1. Równania kwadratowe

Rozwiązanie równania kwadratowego sprowadza się do wyliczenia pierwiastków tego równania. Można to zrobić korzystając z gotowych wzorów podanych powyżej lub sprowadzając równanie do postaci iloczynowej.

Przykład 1. Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Rozwiązanie:

$$a = 1, b = -4, c = 3; \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4,$$

stąd pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Odp.: $x \in \{1; 3\}$

Przykład 2. Rozwiąż równanie:

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

Rozwiązanie:

$$a = 4, b = 4, c = 1; \Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0,$$

czyli równanie ma jeden pierwiastek, który obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

Odp.: $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}$